8.1.

Podobnosť matíc, zmena bázy

Už dlhší čas sa zaoberáme nasledovným: pre maticu A nájsť maticu S (vlastné vektory), aby Λ (vlastné hodnoty), aby platilo:

$$S \Lambda S^{-1} = A \qquad S^{-1} A S = \Lambda$$

dôvod: zjednodušenie výpočtov.

Čo by sa stalo, ak by sme prestali klásť obmedzenia na maticu S a dovolili, aby to bola ľubovoľná invertibilná matica? Bude mať nejaký geometrický význam?

Def. Matice A a $B = M^{-1}AM$ pre regulárnu maticu M sa nazývajú podobné.

Pozn. Ak matica M spĺňa ďalšie podmienky (ortogonálna, unitárna) môžeme hovoriť:

Matice A a $B = M^{-1}AM$ sú ortogonálne podobné (M-ort.)
unitárne podobné (M-unit.)

Otázky: 1) Čo majú podobné matice spoločné?
2) Aký je geometrický význam podobnosti?
3) Ako vyzerá „najjednoduchšia" matica, ktorá je podobná A? unitárne podobná

Odpoveď na 3: - pre diagonalizovateľné je to diagonálna Λ
- pre nediagonalizovateľné to bude J - Jordanov kanonický tvar
- pre unitárnu podobnosť bude odpoveďou Schur...

Najprv však k otázke č. 1.

<u>Tvrdenie</u> Ak A a B sú podobné matice, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom A a B majú rovnaké vlastné hodnoty. Navyše x je vlastný vektor matice A práve vtedy, keď $M^{-1}x$ je vlastný vektor matice B.

<u>**Dôkaz**</u> 1) Ukážeme silnejšie tvrdenie, a to, že matice A a B majú rovnaký charakteristický polynóm.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det M^{-1} \det(A - \lambda I) \det(M) =$$

$$= \det(M^{-1}(A - \lambda I)M) = \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}IM) =$$

$$= \det(B - \lambda I) = \chi_B(\lambda)$$

Keďže A, B majú rovnaké char. polynómy, majú rovnaké aj vlastné hodnoty spolu s algebraickými násobnosťami.

1.4.19 VII

2) Nech $Ax = \lambda x$. Potom $A = MBM^{-1}$, teda

$$MBM^{-1}x = \lambda x \quad / \cdot M^{-1}$$

$$B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x)$$

Čiže λ je vlastná hodnota B a pre nenulový vektor x dostávame (vďaka regularite M) aj nenulovosť vl. vektora $M^{-1}x$.

[illegible] dostávame aj rovnosť geometrických [illegible]

<u>Príklad</u> Matica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je diagonálna, jej vl. hodnoty sú 1 a 0.

- ak $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, potom $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ak $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ a $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(projekčná matica na priamku $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

<u>Pozn</u> Ak by sme chceli nájsť všetky matice, ktoré majú vlastné hodnoty $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (navzájom rôzne), vieme, že každá z nich je podobná diagonálnej $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, teda stačí zobrať všetky matice tvaru

$$B = M \Lambda M^{-1} \quad \text{(pre } M \text{ regulárnu maticu)}$$

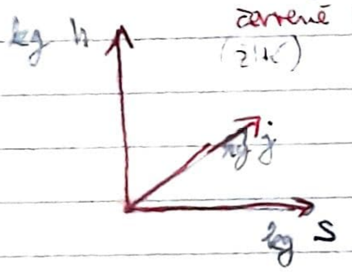
8.3.:

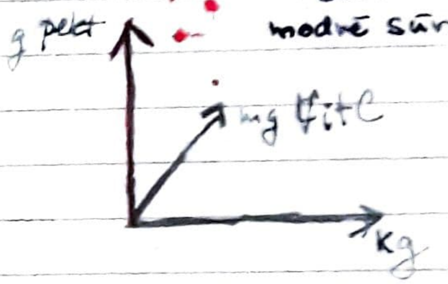
K otázke č. 2

geometrický význam (podobnosti) – zmena bázy, zmena súradníc

Táto ~~ot~~ vec je komplikovaná a spôsobuje problémy pri pochopení, zároveň je kľúčová a dôležitá – treba nad ňou stráviť čas, pohrať sa

Pr Asi si spomínate na príklad o varení lekváru – mali sme ~~tu~~ slivky, jablká a hrušky, ktoré mali váhu (kg), obsah (mg) vitamínu C a obsah (g) pektínu. Mohli v kolki sme mohli popísať pomocou súradnicovej sústavy:





Prechod medzi súradnicami zabezpečovala regulárna matica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 60 & 40 \\ 15 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

potom $MA\begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 60 & 40 \\ 15 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1s+1j+1h \\ 100s+60j+40h \\ 15s+5j+7h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HM \\ vitC \\ Pekt \end{pmatrix}$

podobne by sme mali $M^{-1}\begin{pmatrix} HM \\ vitC \\ Pekt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix}$. Tu si treba všimnúť, že súradnice sa menia lineárne, ~~zmena~~ ... ~~vektorov~~ – sedia v súradniciach

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 1kg slivick → $\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 15 \end{pmatrix}$
hodnota červ. vektora v modr. súradniciach

| Vo všeobecnosti, napr. pri riešení diferenčných alebo diferenciálnych rovníc, tiež môžeme ľubovoľne meniť súradnicové sústavy tak aby nám to čo najviac vyhovovalo.
| A pri riešení rovníc hrali úlohu vlastné vektory.

Tak to podme písať: $B = M^{-1}AM$, $BM^{-1} = M^{-1}A$, $MBM^{-1} = A$
$MB = AM$

(modrá rovnica)

- $Ax = \lambda x$ $\qquad M^{-1}Ax = BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$ ak označíme: $y = M^{-1}x$
$My = x$

tak dostaneme $By = \lambda y$ (červená rovnica)

modrá – ~~zelená~~ žltá   x
červená – červená   y
čierna – modrá   M
... – biela   ...

Čo to znamená v reči rovníc?
Majme modré rovnice (stará súradnicová sústava x) s neznámou u,
chceme nájsť nové rovnice (nová súradnicová sústava y)

daná predpisom $u = Mv$

Modré (pôvodné) rovnice

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad \frac{du}{dt} = \frac{dMv}{dt} = M\frac{dv}{dt} = Au = AMv$$

$$\frac{dv}{dt} = M^{-1}AMv \rightarrow \frac{dv}{dt} = Bv$$

$$u_{k+1} = Au_k$$

$$Mv_{k+1} = AMv_k \implies v_{k+1} = M^{-1}AMv_k \implies v_{k+1} = Bv_k$$

$\boxed{\text{Sem 263 B}}$

Prechodom od u k v (vzťah $u = Mv$) meníme maticu riadiacu rovnicu z A na $M^{-1}AM = B$

Ako sme už povedali, prechod od $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$ (stará báza) (modré súradnice)

k $u = Mv = M\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ zodpovedá zmene súradníc, t.j. zmene bázy.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + u_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + u_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = u_1e_1 + u_2e_2 + \dots + u_ne_n$$

$\|$ dual je M^{-1}

$$Mv = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} | \\ m_1 \\ | \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} | \\ m_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + v_n\begin{bmatrix} | \\ m_n \\ | \end{bmatrix} = v_1 m_1 + v_2 m_2 + \dots + v_n m_n$$

$\boxed{\text{Sem kdesi 14.4.2015}}$

Rovnica $u = Mv$ je ekvivalentná $M^{-1}u = v$.

Teda prechod súradníc v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) k súradniciam u (báza $e_1, e_2, \dots, e_n$) je daný násobením maticou M, $u = Mv$.
Prechod od súradníc u (báza $e_1, e_2, \dots, e_n$) k súradniciam v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) je daný násobením maticou M^{-1}

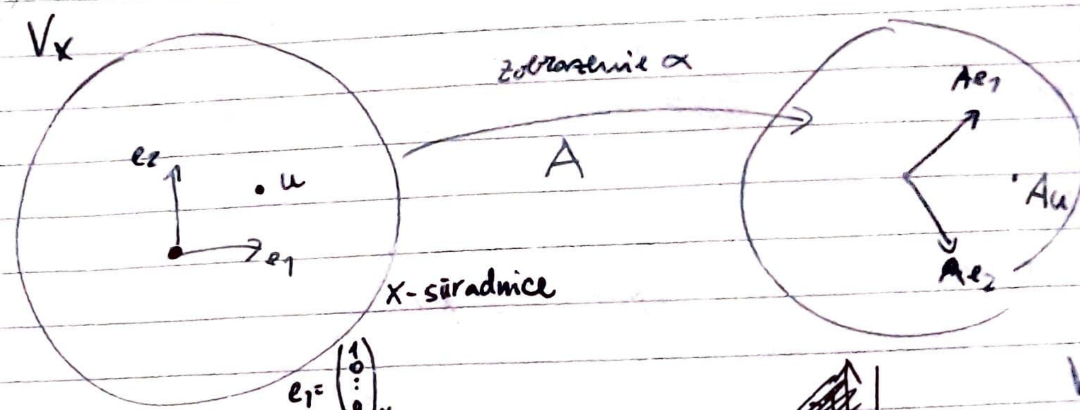
$$v = M^{-1}u.$$

(Rozmyslieť)

8.5

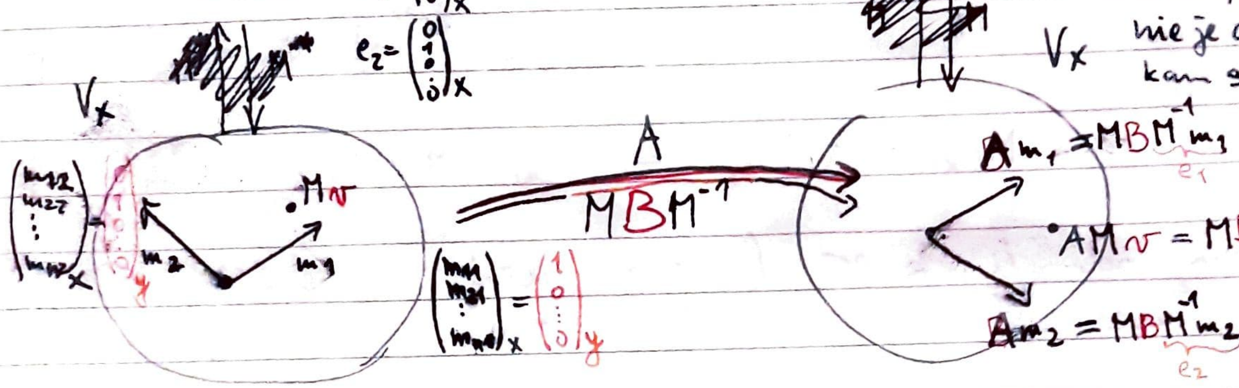
Obrázok – súvis s podobnosťou.

Matica A reprezen... lineárnu transformáciu, ktorá posiela u ↦ ... (špeciálne $e_i \mapsto Ae_i$ ...



$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_x$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_x$

V nových súradniciach nie je až také jasné kam sa majú zobraziť nové bázové vektory m_i



$Am_1 = MB\underbrace{M^{-1}m_1}_{e_1}$ nové bázové vektory m_i

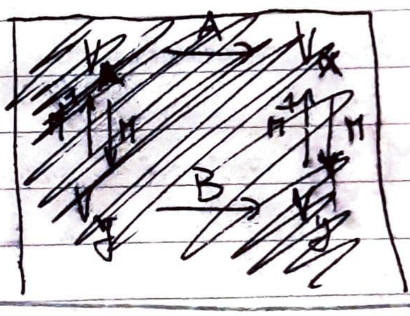
$AMv = MBv$

$Am_2 = MB\underbrace{M^{-1}m_2}_{e_2}$

$u \longmapsto Au$

$\;\,= Mv \qquad = AMv$

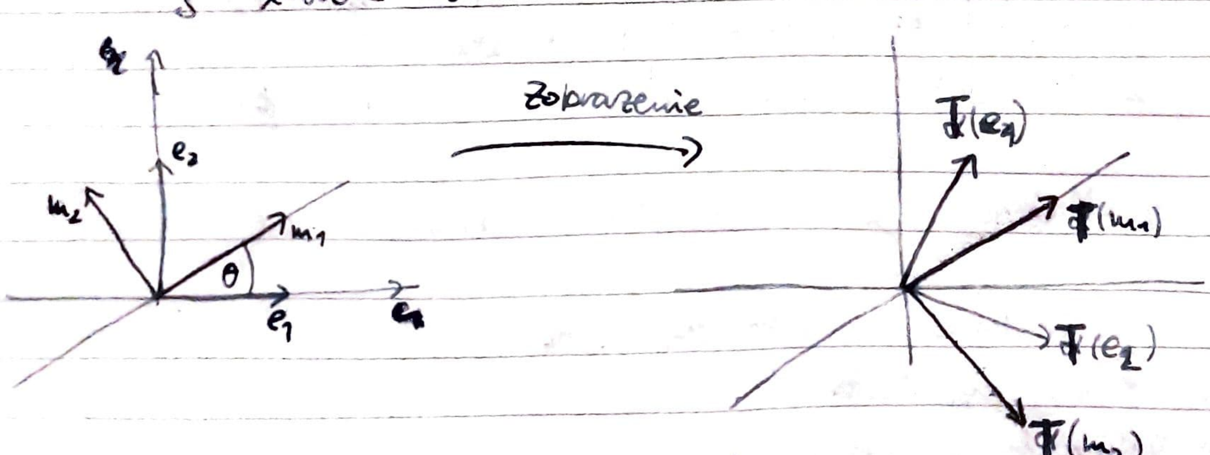
$v \longmapsto M^{-1}AMv = Bv$



Bazmeg

Sem 11.4.17 + Zopakovať

Príklad Osová súmernosť podľa priamky zvierajúcej uhol θ s x-ovou osou.



Štandardná báza: $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Špeciálna báza: $m_1 = \begin{bmatrix}c\\s\end{bmatrix}$, $m_2 = \begin{bmatrix}-s\\c\end{bmatrix}$

Matica pre $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ lebo $T(m_1) = m_1 = 1\cdot m_1 + 0\cdot m_2$
$T(m_2) = -m_2 = 0\cdot m_1 + (-1)m_2$

8.6/9.1

matice prechodu: $M = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $M^{-1} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ (ortog.)

A naozaj

$$A = MBM^{-1} = \overset{M}{\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{M^{-1}}{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}} = \overset{H}{\begin{bmatrix} c^2-s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2-c^2 \end{bmatrix}} =$$

$$\left(= 2\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$(2P - I)$$

~~Trojuholníková forma matice pomocou unitárnej podobnosti~~
~~(Schurova lemma)~~

~~doplniť~~ obrázok v novej súradnicovej sústave

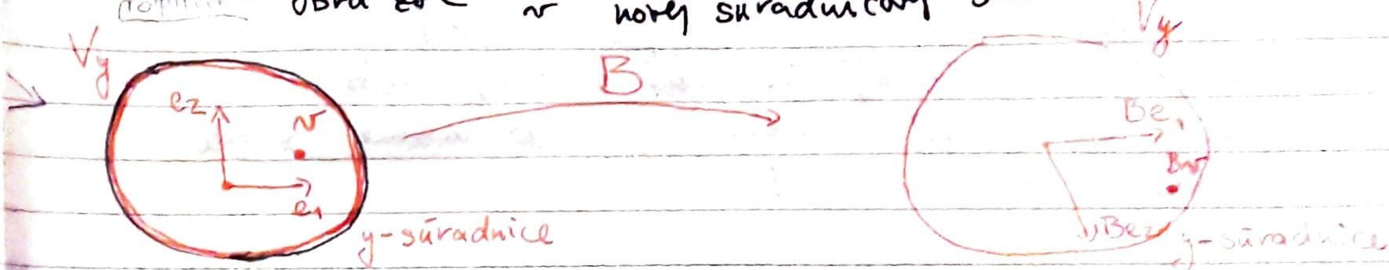


diagram:

$$\begin{array}{ccc} V_x & \xrightarrow{A} & V_x \\ M^{-1}\downarrow\uparrow M & & M^{-1}\downarrow\uparrow M \\ V_y & \xrightarrow{B} & V_y \end{array}$$

lebo: $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tretie}}}{M}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{druhé}}}{B}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prvé}}}{M^{-1}}$

podobne: $B = M^{-1}AM$

pozri tamto príklad.

Trojuholníková forma pomocou unitárnej podobnosti
(Schurova lemma)

Videli sme, že niektoré matice (symetrické, hermitovské, ortogonálne, unitárne, antisym., antiherm.) sú podobné diagonálnym, keď za maticu podobnosti zoberieme ortogonálnu (resp. unitárnu) maticu.

Takže sa môžeme pýtať: ako ďaleko od diagonalizovania