(toto je obdoba tvrdenia, že ~~[crossed out]~~ vl. vektory pre rôzne vl. hodnoty sú LN)

2) Ak $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sú všetky vlastné hodnoty $n \times n$ matice A, potom $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} = \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$, ak $\lambda_i \notin \mathbb{R}$).

t.j. priestor $\mathbb{R}^n$ sa rozkladá na vlastné podpriestory.

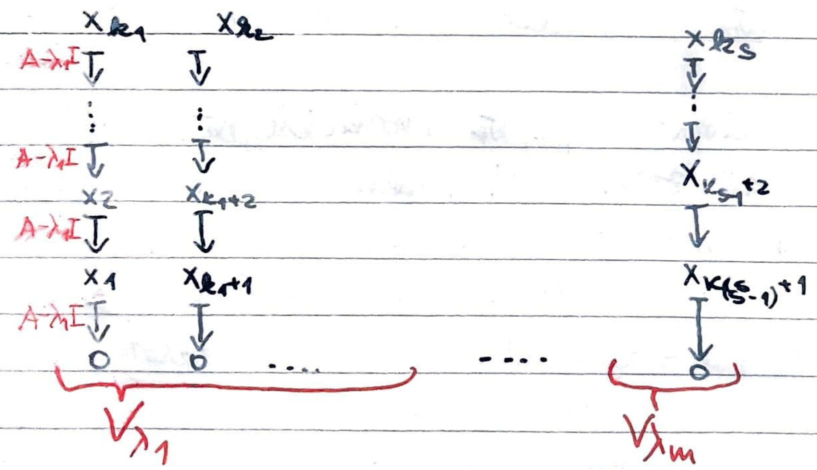
Obe tieto tvrdenia, spolu s Vetou o Jordanovom kanonickom tvare dokážeme, ak nájdeme systém vektorov $x_1, \dots, x_n$ spĺňajúci:

$$Ax_i = \lambda_i \underset{\text{vl. vektor}}{x_i} \quad \text{alebo} \quad Ax_i = \lambda_i \underset{\text{zovš. vl. vektor}}{x_i} + x_{i-1}$$

a tvoriaci bázu $\mathbb{R}^n$.

Ako si to predstaviť: zovšeobecnené vlastné vektory pospájame do reťazcov; reťazce prislúchajúce tej istej vlastnej hodnote λ_i "zhrčíme" dokopy.

(*)



Dôkaz (existencie takéhoto systému, a teda Jordanovej vety) Matematickou indukciou: (1°) každá 1x1 matica je diagonálna a je automaticky v Jordanovom tvare, ~~teda~~ ~~pre~~

(2°) nech tvrdenie platí pre všetky $r \times r$ matice, $r < n$. t.j. pre každú $r \times r$ maticu vieme nájsť systém r vektorov, ktoré ~~bázu~~ sú LN a tvoria reťazce zovšeobecnených vl. vektorov ako v (*)

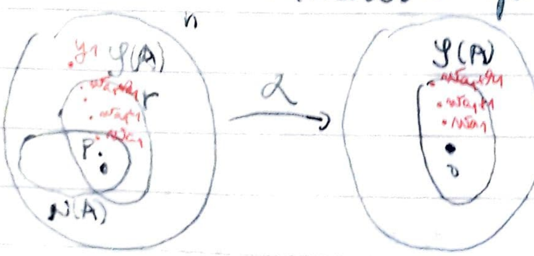
a) Predpokladajme, že A je singulárna, teda nula je jej vlastnou hodnotou.
Ak by to tak nebolo, zoberme maticu $A' = A - \lambda I$.
Potom Jordanov tvar A bude Jordanov tvar A' plus λI na diagonále, teda nám stačí ukázať, že A' má Jordanov tvar. λ sa dá zvoliť tak, aby to bola vlastná hodnota A, teda matica A' bude singulárna.

b) Ak je A singulárna, tak dimenzia stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$, $r = \dim \mathcal{S}(A)$ je menšia (ostro) ako n.
Matica A zobrazuje $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}(A)$, čiže na tomto podpriestore sa dá zúžiť na zobrazenie popísané nejakou $r \times r$ maticou B, ku ktorej vieme nájsť Jordanov tvar na základe IP a príslušných r lineárne nezávislých vektorov $w_1, w_2, \dots, w_r$ spĺňajúcich

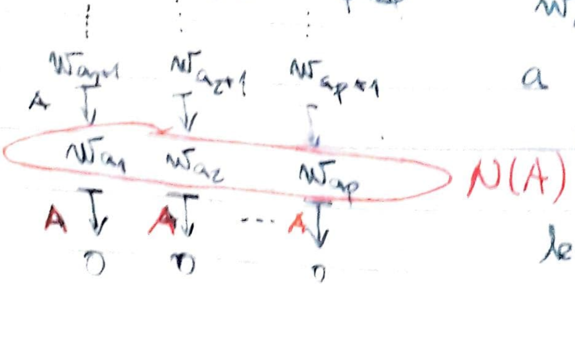
$$A w_i = \lambda_i w_i \qquad \text{alebo} \qquad A w_i = \lambda_i w_i + 1\, w_{i-1}.$$

sem 29.4.2019

c) Takže máme r vektorov $w_1, \dots, w_r$ tvoriacich bázu $\mathcal{S}(A)$. Potrebujeme ale vygenerovať aj zvyšok $\mathbb{R}^n$. Pozrime sa na nulový priestor, čo je vlastný podpriestor V_0 zodpovedajúci $\lambda = 0$.
Je celkom možné, že $\mathcal{S}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ majú netriviálny prienik dimenzie p
- tam patria vlastné vektory k vl. hodnote 0 (lebo patria do $\mathcal{N}(A)$)
- zároveň sa dajú vygenerovať pomocou $w_1, \dots, w_r$ - bázou $\mathcal{S}(A)$.



Preto p z reťazcov z kroku b) bude zodpovedať vlastnej hodnote 0.



Koncové vektory jednotlivých reťazcov $w_{a_1+k_1}, \dots, w_{a_p+k_p}$ patria do ... a zároveň neexistuje žiaden vektor z $\mathcal{S}(A)$, ktorý by sa do nich ... pomocou transformácie A (lebo koncové). Na druhej strane,

$\mathcal{S}(A) = \mathrm{Im}\, \alpha$, teda $w_{a_i + k_i} = A y_i$ pre nejaké y_i nepatriace do $\mathcal{S}(A)$. Preto reťazec môžeme predĺžiť:

$$0 \leftarrow w_{a_i} \leftarrow w_{a_i+1} \leftarrow \dots \leftarrow w_{a_i+k_i} \leftarrow y_i$$

d) Vieme, že nulový priestor $\mathcal{N}(A)$ má dimenziu $n-r$. Preto okrem p rozmerného prienku s $\mathcal{S}(A)$ musí obsahovať ďalších $(n-r-p)$ vektorov z_i mimo $\mathcal{S}(A)$, tak, že tieto spolu s w_{a_i} tvoria bázu $\mathcal{N}(A)$.
Takto sme získali $(n-r-p)$ vektorov z_i, vlastných vektorov.

Rekapitulácia: r vektorov w_i, spĺňajúcich
$$A w_i = \lambda_i w_i + w_{i-1}$$
p vektorov y_i, spĺňajúcich
$$A y_i = 0 \cdot y_i + w_{a_i+k_i}$$
$n-p-r$ vektorov z_i spĺňajúcich
$$A z_i = 0 \cdot z_i = 0.$$

Ak takéto vektory vložíme do matice M a správne preusporiadame dostaneme rovnosť
$$AM = MJ.$$
Dôkaz Jordanovej vety bude hotový, ak ukážeme, že existuje inverzná matica M^{-1}, čo je to isté ako ukázať, že vektory w_i, y_i a z_i sú lineárne nezávislé. Zvyšok dôkazu ale až po ilustrácii.

Ilustrácia Majme 5×5 maticu $A' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ so spektrom spekt $= \{6, 6, 2, 2, 2\}$.

$n = 5$

a) Matica A' nie je singulárna, ale $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ už bude.

$r = 3$ b) Nahliadneme, že $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}(e_1, e_3, e_5) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

potom matica zodpovedajúca zobrazeniu $\mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(A)$ vzhľadom na bázu e_1, e_3, e_5 bude:

$$\alpha(e_1) = 4e_1 + 0e_3 + 0e_5$$
$$\alpha(e_3) = 0e_1 + 0e_3 + 0e_5$$
$$\alpha(e_5) = 4e_1 + 4e_3 + 4e_5$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme potom (IP) $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

tieto vektory spĺňajú, teda tvoria systém reťazcov, podľa IP.

$$A w_1 = 4 w_1$$
$$A w_2 = 4 w_2 + w_1$$
$$A w_3 = 0 \cdot w_3$$

c) Nulový priestor matice $N(A)$ zodpovedá nulovým stĺpcom, teda

$$N(A) = \operatorname{span}(e_2, e_3) = \operatorname{span}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right],$$ čiže prienik $S(A) \cap N(A)$

$p = 1$

je jednorozmerný a generovaný $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Preto existuje vektor y, ktorý sa zobrazením daným maticou A zobrazí do w_3: $y \mapsto Ay = w_3$.

$$A \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) V tejto časti hľadáme $n - p - r = 5 - 1 - 3 = 1$ vektor, ktorý patrí do $N(A)$ ale nepatrí do $S(A)$. Takým môže byť napríklad

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potom všetkých 5 vektorov tvorí systém reťazcov:

$A w_1 = 4 w_1$, $A w_2 = 4 w_2 + w_1$, $A w_3 = 0 \cdot w_3$, $Ay = 0 \cdot$ … a $Az = 0 \cdot z$.

Matica J v tomto prípade bude (tri reťazce – tri bloky)

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$ a matica $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pokračovanie dôkazu: Zostáva nám ukázať, že vektory w_i, y_i, z_i tvoria bázu, teda sú lineárne nezávislé.

Predpokladajme: $\sum d_i w_i + \sum b_i y_i + \sum c_i z_i = 0$.

Vynásobením maticou A zľava dostávame:

$$\sum_i d_i \overset{Aw_i}{\begin{pmatrix} \lambda_i w_i \\ \text{alebo} \\ \lambda_i w_i + w_{i-1}\end{pmatrix}} + \sum_i \overset{Ay_i}{b_i w_{a_i+k_i}} + \overset{Az_i}{\sum c_i \cdot 0} = A\cdot 0 = 0.$$

Čiže všetky komponenty vieme vyjadriť pomocou w_i, ktoré sú bázou $\mathcal{S}(A)$, teda lineárne nezávislé.
Mohlo by sa stať, že takáto kombinácia by dala nulový vektor aj pre nenulové d_i a b_i. Uvidíme však, že to nenastáva. Vektory $w_{a_i+k_i}$ (koncové vektory reťazcov) sa v prvej sume nevyskytujú (ony zodpovedajú $\lambda_i = 0$ a sú koncové). Preto jediný príspevok pochádza z Ay_i, ktorý je b_i, nutne $b_i = 0$, ~~aby sme dostali~~ z lineárnej nezávislosti w_i.

Vrátiac sa k $\sum d_i w_i + \sum \cancel{b_i} y_i + \sum c_i z_i = 0$
stredný člen vypadne a máme

$$\underbrace{\sum d_i w_i}_{\in \mathcal{S}(A)} = -\underbrace{\sum c_i z_i}_{\notin \mathcal{S}(A)}$$

~~(resp. patrí doplnku).~~

Pritom vektory z_i boli vyberané tak, aby nepatrili (ani ich netriviálna lin. kombinácia) do $\mathcal{S}(A)$.
Jediná možnosť c_i aj d_i sú nuly, vektory ~~sú~~ w_i, y_i a z_i sú LN, tvoria bázu $\mathbb{R}^n$. ∎

Príklad Použitie Jordanových blokových matíc pri mocninách a exponenciálach matíc.

Diagonalizácia matíc sa ukázala výhodná pri počítaní mocnín matice, či jej exponenciály.

Ak $A = S\Lambda S^{-1}$, potom $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

resp. $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$

Ak matica A nie je diagonalizovateľná, situácia sa skomplikuje.
Ďalej platí: $A = MJM^{-1}$, a teda $A^k = MJ^kM^{-1}$

a $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = M\left(I + Jt + \frac{(Jt)^2}{2!} + \dots\right)M^{-1} = Me^{Jt}M^{-1}$

Aké sú teda mocniny a exponenciála J (resp. Jt)?

→ sem 5.5.2015

Spravme pre blok veľkosti 3×3.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\quad J^2=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},\quad J^3=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix},$$

až
$$J^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}$$

pre väčšie matice by nám vystupovali kombinačné čísla

Počítaním $e^{Jt}=I+Jt+\frac{J^2t^2}{2!}+\frac{J^3t^3}{3!}+\dots$

by sme dostali:

$1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\dots$	$0+1t+\frac{2\lambda t^2}{2!}+\frac{3\lambda^2t^3}{3!}+\frac{4\lambda^3t^4}{4!}+\dots$	$0+0+\frac{1t^2}{2!}+\frac{3\lambda t^3}{3!}+\frac{4\cdot3\lambda^2t^4}{2\cdot4!}$
0	$1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\dots$	$0+1t+\frac{2\lambda t^2}{2!}+\frac{3\lambda^2t^3}{3!}+\frac{4\lambda^3t^4}{4!}$
0	0	$1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\dots$

na hlavnej diagonále je "čistá exponenciála" $e^{\lambda t}$.

Na ďalšej dostaneme
$$\left(0+1t+\frac{2\lambda t^2}{2!}+\frac{3\lambda^2t^3}{3!}+\frac{4\lambda^3t^4}{4!}+\dots\right)=t\left(1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\frac{\lambda^3t^3}{3!}+\dots\right)=te^{\lambda t}$$

Na ďalšej:
$$0+0+\frac{1\cdot t^2}{2!}+\frac{3\lambda t^3}{3!}+\frac{4\cdot3/2\ \lambda^2t^4}{4!}+\dots\frac{\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}t^n}{n!}+\dots=\frac{t^2}{2}\left(1+\lambda t+\frac{\lambda^2t^2}{2!}+\dots\right)=\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$$

Výsledok
$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&\frac12t^2e^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\0&0&e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

Pozn. Týmto sme našli všeobecné riešenie ~~sú~~ lineárnych dif. a diferenciálnych rovníc aj pre nediagonalizovateľné ...

okrem čistých mocninových riešení $c_i \lambda_i^k y_i$, resp. čistých exponenciálnych riešení $c_i e^{\lambda_i t} y_i$ tu budú vystupovať aj polynomiálno-mocninové, resp. polynomiálno-exponenciálne riešenia tvaru

$$c_i\, p(k)\, \lambda_i^k y_i \quad \text{resp} \quad c_i\, p(t)\, e^{\lambda_i t} y_i.$$

Sem 9.5.17

Zhrnutie

Podobnosť matíc

1) A je diagonalizovateľná:
stĺpce matice S sú vlastné vektory a $S^{-1}AS = \Lambda$ je diagonálna.

2) A je ľubovoľná
stĺpce matice M sú vlastné vektory a zovšeobecnené vlastné vektory, Jordanov tvar $M^{-1}AM = J$ je blokovo diagonálny

3) A je ľubovoľná a U je vhodná unitárna. U sa dá vybrať tak, že $U^{-1}AU = U^H A U = T$ je horná trojuholníková.

4) Špeciálne matice: A je normálna $A^H A = AA^H$, ~~teda~~ potom sa U dá vybrať tak, že $U^{-1}AU = \Lambda$ je diagonálna
 a) A je hermitovská – Λ je reálna
 a') A je reálna symetrická – Λ je reálna, $U = Q$ je ortogonálna
 b) A je anti-hermitovská – Λ je rýdzo imaginárna
 c) A je ortogonálna alebo unitárna $\rightarrow$ všetky $|\lambda_i| = 1$.

Sem 30.4.13