2

potom rovnica $1 = 5u^2 + 8uv + 5v^2 = [u,v]\, A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

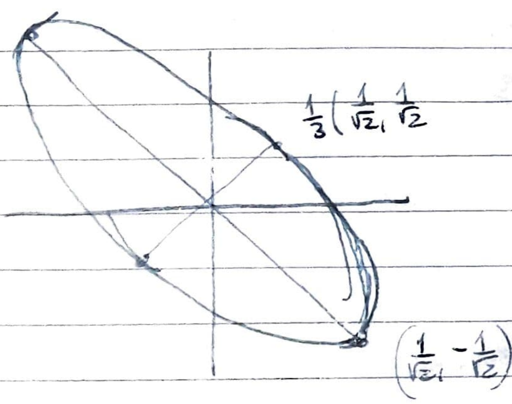
sa da prepísať na:

$$[u,v]\, \cancel{Q^T \Delta Q}\; Q \Delta Q^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$$

$$= [u,v] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\tfrac{u}{\sqrt{2}} - \tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{u}{\sqrt{2}} + \tfrac{v}{\sqrt{2}} \right] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \left(\tfrac{u}{\sqrt{2}} - \tfrac{v}{\sqrt{2}} \right)^2 + 9 \left(\tfrac{u}{\sqrt{2}} + \tfrac{v}{\sqrt{2}} \right)^2.$$



Prvá zátvorka je zodpovedná za veľkú poloos (body $\pm\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$).

Druhá zátvorka za malú poloos (body $\pm \frac{1}{3}\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$)

$$\frac{1}{3} \uparrow \frac{1}{\sqrt{9}}$$

Vo všeobecnosti:

$$c\ \cancel{1} = x^T A x = (x^T Q) \Delta (Q^T x) = y^T \Delta y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

pri zmene súradníc $y = Q^T x$.

Potom y_i môže byť najviac $\pm \sqrt{\frac{c}{\lambda_i}}$, teda dĺžky hlavných osí elipsoidu sú $\sqrt{c}/\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{c}/\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{c}/\sqrt{\lambda_n}$, smery sú vlastné vektory $x_1, \ldots, x_n$.

~~SEMIDEFINITNOSŤ, ZÁPORNÁ DEFINITNOSŤ~~

~~Zmena kvadratickej formy pri zmene súradníc~~

Začali sme s kvadratickou formou $f(x) = x^T A x$ a videli sme dôležitú úlohu, ktorú hrajú rozklady:

$$A = LDL^T$$

$$A = Q \Delta Q^T.$$

Obe predstavujú diagonalizáciu kvadratickej formy a znamienka v D (resp. Δ) vypovedajú o definitnosti. Sylvestrovo krit hovorí, že ~~od~~ znamienka v D (pivoty) sú kladné práve vtedy, keď sú kladné aj znamienka v Δ (vl. hodnoty).

(A potom $x^T A x = 1$ je rovnicou $(n-1)$ rozmerného elipsoidu).

Vo všeobecnosti by sme sa mohli pýtať, či existujú obdoby Sylvestrovho kritéria pre rozhodnutie kladnej semidefinitnosti či zápornej definitnosti.
Ako uvidíme, nakoniec to celé bude o znamienkach D, resp. Δ.

Tvrdenie Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

I) Matica A je kladne semidefinitná t.j. $x^T A x \geq 0$ $\forall x \in R^n$	záporne definitná $x^T A x < 0$ pre $x \neq 0$.
II) Všetky vl. hodnoty A spĺňajú $\lambda_i \geq 0$	$\lambda_i < 0$
III) všetky ~~hlavné~~ $k \times k$ ~~podmatice~~ minory majú nezáporné determinanty	hlavné podmatice párnej dimenzie kladný det, hlavné podmatice ~~záporné~~ nepárnej dimenzie záporný det.
IV) pivoty sú nezáporné, resp. eliminácia zlyhá a túto podmienku treba vypustiť	pivoty sú záporné, eliminácia nezlyhá
V) existuje matica R spĺňajúca $A = R^T R$, R môže mať LZ stĺpce	$\exists R$, s LN stĺpcami $A = -R^T R$

Dôkaz Analogicky ako Sylvestrovo kritérium.

Pozn. Keďže matica A je diagonalizovateľná (veta o hl. osiach) tak $h(A) =$ počet nenulových vl. hodnôt = počet úplných štvorcov v $x^T A x$.

Príklady $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ aké subdeterminanty?

(t.j. treba sa pozrieť na všetky minory aby sme určili definitnosť.)

ZMENA KVADRATICKEJ FORMY PRI ZMENE SÚRADNÍC

Pristavme sa ešte na chvíľu pri rozkladoch matice kvadratickej formy:

$$A = LDL^T = Q\Lambda Q^T = Q\Lambda Q^{-1}$$

~~Pre kladne definitnú sme dostali~~ $\cancel{D = \sqrt{D}\sqrt{D},\ \Lambda = \sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}}$

Druhý rozklad zodpovedá diagonalizácii matice A pomocou ortogonálnej matice vl. vektorov Q, teda je to podobnosť s diagonálnou maticou Λ.
V prvom prípade však ide o niečo iné... To podobnosť nie je.

Vysvetlením je, ako to už nadpis napovedá, zmena súradníc.
Nech $x = Cy$, teda regulárna matica C nám udáva prechod od súradníc x k novým súradniciam y.

Potom:
$$f(x) = x^T A x = (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y = f'(y).$$

Čiže matica A kvadratickej formy $f(x)$ sa zmenila na maticu C^TAC kvadratickej formy $f'(y)$ v nových súradniciach.

Def. Hovoríme, že matice A a C^TAC sú **kongruentné**.

Pozn. • Ak A je symetrická, aj C^TAC je symetrická.

• Kongruentnosť je relácia ekvivalencie:

$$A = I^T A I \qquad \text{– reflexívnosť}$$

– symetria

– tranzitívnosť.

Podobne ako pri podobnosti matíc sa môžeme pýtať na najjednoduchšiu maticu v danej triede kongruencie –

na tzv. kanonický tvar kvadratickej formy. Ten bude súvisieť s tzv. signatúrou kvadratickej formy - početnosťou znamienok vlastných hodnôt, ktoré sa prechodom od A k C^TAC zachovávajú vďaka nasledujúcej vete:

Tvrdenie (Sylvestrov zákon zotrvačnosti)
Matica C^TAC má rovnaký počet kladných, záporných a nulových vlastných hodnôt ako matica A.

Dôkaz Predpokladajme, že A je regulárna, t.j. 0 nie je vlastnou hodnotou.

(Ak by bola, stačí tvrdenie dokázať pre $A+\varepsilon I$ a $A-\varepsilon I$, ktoré sa malou perturbáciou dajú spraviť regulárne.)

Potrebujeme teda odsledovať počty kladných a záporných vl. hodnôt.

Dôkaz v knižke používa pekný matematický trik - preto si ho uvedieme, aj keď technické detaily nespravíme kompletne; myšlienka zostáva.

Matica C reprezentuje nejakú bázu v $\mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti jej vektory nie sú kolmé ani nemajú jednotkovú dĺžku. Môžeme však vytvoriť triedu matíc $C(t)$, kde budeme túto bázu postupne spojito "kolmiť" a "normalizovať". Pritom si dáme pozor, aby sme stále zachovali jej lineárnu nezávislosť - matice $C(t)$ budú regulárne pre všetky časy t.

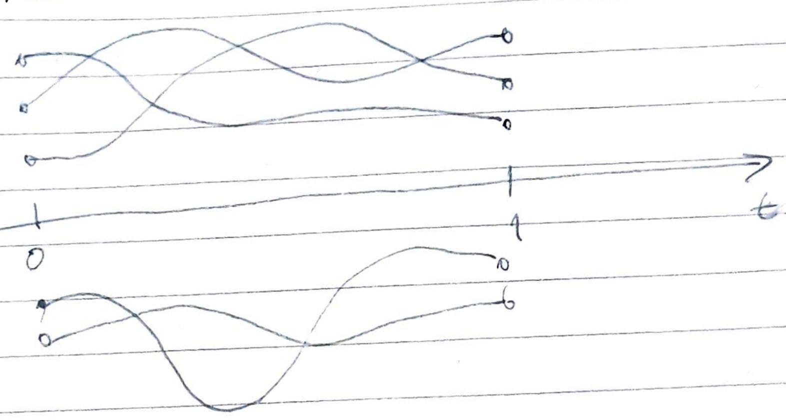
Dostaneme takto triedu $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, kde $C(0) = C$ (pôvodná matica) a $C(1) = Q$ (ortogonálna matica).

$C(t) = Q((1-t)R + tI)$

$C = QR$

Potom $C^T(t)\,A\,C(t)$ je regulárna $n\times n$ matica pre každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ (súčin troch regulárnych). Teda má nejaké kladné a nejaké záporné vlastné hodnoty, (nulové nemá). Vlastné hodnoty $C^T(t)\,A\,C(t)$ môžeme nakresliť do (multi) grafu:

6 C^TAC $\qquad\qquad$ $Q^TAQ = Q^{-1}AQ$



Čo tento obrázok znamená? Žiadna čiara nepretína nulu
- lebo všetky matice $C^T(t)AC(t)$ sú regulárne, nemáme nulovú vl. hodnotu.
- Naozaj ide o čiary – matice $C(t)$ sa menia spojito, aj matice $C^T(t)AC(t)$ sa menia spojito, aj ich vl. hodnoty sa menia spojito
- preto počet kladných (a záporných) vlastných hodnôt v čase $t=0$ a $t=1$ musí byť rovnaký.
- Lenže vlastné hodnoty matice $C^T(1)AC(1) = Q^TAQ = Q^{-1}A$ sú rovnaké ako vl. hodnoty matice A (podobnosť)

čbtd

Dôsledok: Vďaka diagonalizácii $A = Q^T\Lambda Q$ (cez vlastné vektory) a $A = LDL^T$ (Gaussova eliminácia) vidíme, že matice A, Λ a D sú kongruentné. Vlastné hodnoty Λ a D sú priamo ~~vlastne~~ ich diagonálne zložky, preto početnosť ich znamienok (signatúra) je rovnaká.

19.5.2015 –20min

Def: Signatúra kvadratickej formy $f(x) = x^TAx$ je (k, z, n)

k – počet kladných vl. hodnôt

z – počet záporných vl. hodnôt

n – počet nulových vl. hodnôt (násobnosť $\lambda = 0$).

→

Vďaka rozkladu $A = LDL^T$ to je však to isté ako počty kladných, záporných, nulových pivotov. (Pozor na prípad, keď eli... zlyhá! t.j. $n \neq 0$)

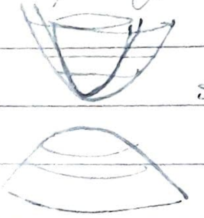
Def./Tvrd. Vhodnou zmenou súradníc sa ľubovoľná kvadratická forma dá upraviť na kvadratickú formu:

$$f(y) = y^T \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{k} & & \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{z} & \\ & & \overbrace{0 \ \ddots \ 0}^{n} \end{pmatrix} y$$

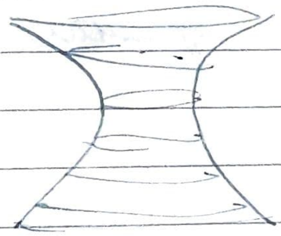
danú diagonálnou maticou s 1, -1, a 0 na diagonále, signatúra (k, z, n). Táto forma je určená kanonicky (jednoznačne) pôvodnou formou (vďaka signatúre) (a Sylv. zákonu zotrvačnosti). Zmena súradníc ale kanonická (jednoznačná) nie je.

Geometrický význam

Ak chceme zistiť aký typ plochy (resp. nadplochy) určuje kvadratická forma $f(x) = x^T A x = 1$, potrebujeme zistiť jej signatúru. Podľa toho sa zistí počet osí, ktoré sa s plochou pretínajú, resp. počet osí, ktoré sa jej vyhýbajú. elipsoid, hyperboloid a pod:



sign $(1,-1,-1)$



sign $(1,1,-1)$

Bilineárne formy

Videli sme dávnejšie, že norma (resp. jej druhá mocnina) a skalárny súčin spolu súvisia:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^T I x$$

Kvadratické formy boli vlastne akési zovšeobecnenia $\|x\|^2$.

Preto sa môžeme prirodzene pozrieť na funkciu:

$$\varphi(x,y) = y^T A x \qquad \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Takáto funkcia spĺňa podmienku bilinearity, je lineárna v oboch funkčných zložkách:

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y) \qquad \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \varphi(x, y_1) + \beta \varphi(x, y_2) \qquad \forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2$$

- Bilineárna forma $\varphi(x,y)$ je symetrická, ak spĺňa

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

teda: $y^T A x = x^T A y$.

Lenže ide o 1×1 matice, tak $(y^T A x)^T = (y^T A x)^T = x^T A^T y$.

Preto ~~matica~~ $A = A^T$ dá symetriu bilineárnej formy.

- Špeciálnym prípadom bilineárnych foriem $\underbrace{\text{sú}}_{V \times V \to \mathbb{R}}$ ~~s~~ skalárne súčiny, ktoré spĺňajú:

1) symetria $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2) bilinearita $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$
3) kladná definitnosť $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

– čím sa dostávame k symetrickým kladne definitným maticiam...

A dalo by sa pokračovať...

– singulárny rozklad $A = U \Sigma V^T$
(pre obdĺžnikové matice)

– Raleyighov podiel $R = \frac{x^T A x}{x^T x}$

– pseudoinverznú maticu A^+