I. Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Na tejto prednáške začneme druhú časť základného kurzu lineárnej algebry.
Doteraz sme sa, v rôznych formách, venovali hlavne riešeniu systémov rovníc, t.j.

$$\boxed{Ax = b}$$

V nasledujúcej časti bude dominovať rovnica (A je $n \times n$)

$$\boxed{Ax = \lambda x} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

- to, že táto rovnica je naozaj dôležitá uvidíme pri viacerých výpočtoch:
  - opisuje vlastnosti A ako zobrazenia z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  - má obrovský význam v diferenciálnych a diferenčných rovniciach, ktoré sú aplikáciou lineárnej algebry.

Príklad 1

Nech $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. • Pozrime sa najprv na rovnicu $Ax = \lambda x$

- píšme: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad Ax = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

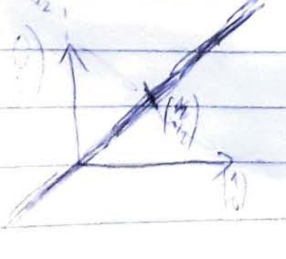
Aké to má riešenia?

$\lambda = 1 \qquad x_1 = x_2 = t$

$\lambda = 0 \qquad x_1 = -x_2$

- teda riešeniami sú $\lambda = 1$ a $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$.
  $\lambda = 0$ a $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$.

- Pozrime sa na A ako na maticu zobrazenia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



- Čo to je?
- Čo je jej stĺpcový priestor?
- Čo je jej nulový priestor?

- ide o maticu ortogonálnej projekcie — na ... (1) ... priestor)

Vidíme, že riešením rovnice $Ax=\lambda x$ dostávame podobnú informáciu ako analyzovaním zobrazenia $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A to ...

<u>Riešenie rovnice $Ax=\lambda x$</u>

- V tejto rovnici sú neznáme λ aj x, čím sme stratili linearitu, ktorú sme doteraz používali. Elimináciou by sme nikam nedošli (!) - lebo nepoznáme pravú stranu.

A však nájdeme λ (v predchádzajúcom príklade 1 alebo 0) - konkrétne číslo - x už vieme dopočítať lebo:

$$Ax = \lambda x$$

úpravou:

$$(A-\lambda I)x = 0$$

- teda vektor x patrí do nulového priestoru matice $(A-\lambda I)$
- keď chceme aby x bolo nenulové treba λ zvoliť tak aby nulový priestor $N(A-\lambda I)$ bol netriviálny, ~~teda~~ matica $(A-\lambda I)$ musí byť singulárna.

Pozn. vektor $x=0$ vždy spĺňa rovnicu $Ax=\lambda x$, preto nás nezaujíma.

Keď je $(A-\lambda I)$ singulárna, jej determinant musí byť 0.

<u>Definícia</u> Číslo λ je <u>vlastná hodnota</u> štvorcovej matice A práve keď $\det(A-\lambda I)=0$.

Pre každé riešenie tzv. <u>charakteristickej rovnice</u> bude existovať <u>vlastný vektor</u> x spĺňajúci

$$(A-\lambda I)x = 0 \quad \text{alebo} \quad Ax=\lambda x.$$

Príklad $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = (1/2-\lambda)(1/2-\lambda) - 1/2 \cdot 1/2 = \frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{4} =$$

3

[illegible]
- Členy λ vždy odčítavame od diagonály
- Rovnica, ktorú potrebujeme pre λ vyriešiť je v skutočnosti polynóm, ktorý nazývame charakteristický polynóm.

Korene tohto polynómu budú vlastné hodnoty matice A.
Nájsť sa dajú pomocou vzorca pre riešenie kvadratických rovnic, alebo priamo:

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Teda $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

Zaujímavejší príklad 2 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

[illegible]

Vo všeobecnosti pre každú 2x2 maticu platí, že charakteristický polynóm $\det(A - \lambda I)$ obsahuje člen λ^2 (a žiadne vyššie), čo bude viesť k práve dvom vlastným hodnotám.

Výpočet vlastných vektorov

pre $\lambda_1 = 1$ $(A - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0$

riešenie: $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

pre $\lambda_2 = 0$ $(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0$

riešenie $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$

Pre $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$(B - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Táto matica teda nevyzerá, ale ma[illegible] hodnosť 1. $\begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

pre $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dopočítajte...

Zhrnutie: Pri počítaní vlastných vektorov robíme postupne:

① Výpočet determinantu $\det(A-\lambda I) = \chi_A(\lambda)$
- charakteristický polynóm matice A – jeho stupeň je n

② Nájdenie koreňov char. polynómu. – n koreňov zodpovedá n vlastným hodnotám

③ Pre každú vlastnú hodnotu λ riešime systém $(A-\lambda I)x=0$.
Nakoľko determinant $\det(A-\lambda I)=0$, existujú netriviálne riešenia – vlastné vektory.

(Pozn. ak vyjde vlastný vektor $\binom{0}{0}$, znamená to, že ste niekde spravili chybu...)

Komentár: Videli sme, že pre 2x2 projekčnú maticu zohrávali vlastné vektory dôležitú geometrickú úlohu. Pozrime sa teda na všeobecnú situáciu.

① Majme riešenie rovnice $Ax_1 = \lambda x_1$
Uvažujme lineárne zobrazenie $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané predpisom
$\varphi: x \mapsto Ax$.
Kam zobrazí φ (špeciálny) vektor x_1?

$$x_1 \mapsto Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

– t. j. x_1 sa zobrazí na svoj λ_1-násobok (!)

Lineárne zobrazenie tento vektor "naťahuje" na λ_1-násobok.

Vo všeobecnosti x a Ax nie sú rovnobežné. (t. j. $Ax \neq \lambda x$)
Vlastné vektory sú tie špeciálne vektory, pre ktoré platí: $\varphi(x) = Ax$ rovnobežný s x.

sem 16.2.2016 I
(kvôli štrajku)

Príklad 3 Diagonálna matica.

Nech $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Potom $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(3-\lambda)$

Tomu zodpovedá $\lambda_1 = 2$, ~~$\lambda_2 = 3$~~ $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lineárne zobrazenie dané maticou A "naťahuje" vektory x_1

$A x_1 = 2 x_1$

$A x_2 = 3 x_2$

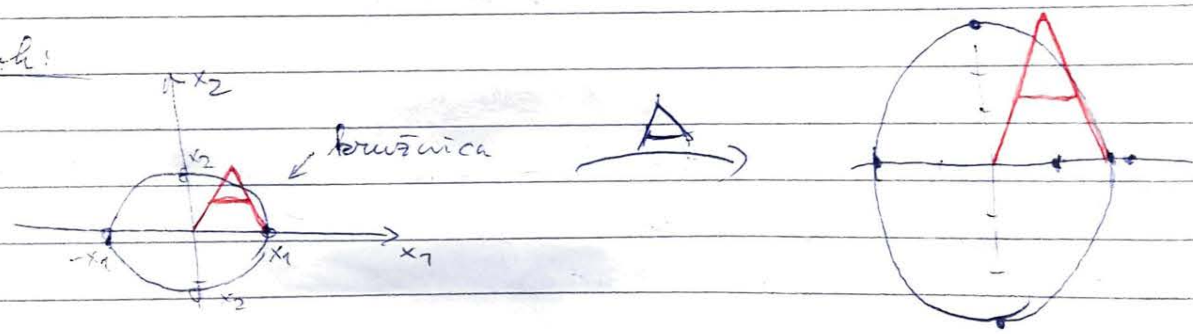
Pre iné vektory, napr. $x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$

ale dostávame

$$Ax = A(a x_1 + b x_2) = a \lambda_1 x_1 + b \lambda_2 x_2 = [$$

Teda zložku v smere x_1 naťahuje $2x$, zložku v smere x_2 naťahuje 3x

Obrázok:



Body x_1 a x_2 zobrazí na $2x_1$ resp. $3x_2$. Kam ale zvyšok kružnice? Odpoveď: elipsa. Osi elipsy sú práve x_1 a x_2.

Príklad 4 Projekčná matica 3x3.

$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ Potom $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2$

z čoho vyjde $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_{2,3} = 0$

Potom $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pozn V tomto prípade vyšla 0 ako (dvojnásobná) vlastná hodnota. tj. Ako sme už videli predtým, aj nula môže byť vlastnou hodnotou. – t.j. koreňom charakteristického polynómu rovnako ako každé iné číslo.

Potom existuje (nenulový) vlastný vektor x spĺňajúci:

$$Ax = 0x = 0. \qquad \text{Čiže } x \in N(A).$$

$\Longleftrightarrow$

Nulová vlastná hodnota teda znamená, že matica A je singulárna $(0 = \chi(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0)$.

Pre nesingulárne matice, na druhej strane, budeme mať nenulové vlastné hodnoty.

3x

Príklad 5 Vlastné hodnoty pre hornú trojuholníkovú maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

determinant je súčin prvkov na diagonále, nulový pre $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Teda vlastné hodnoty sú priamo zložky na diagonále.

Pozn

Pre všeobecné matice môže byť situácia oveľa komplikovanejšia.

názvy & roky:

Pozn

Pre výpočet koreňov polynómov stupňov 2, 3 a 4 existujú explicitné vzorce (aj keď nie veľmi použiteľné - ja si ich nepamätám a ani som ich (žiaľ) nikdy nepotreboval)

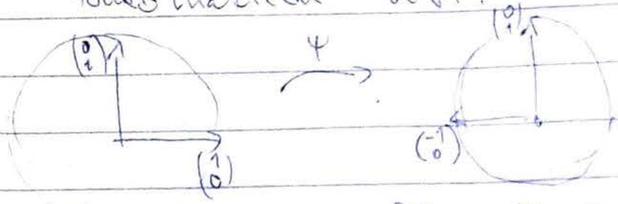
Galois však dokázal, že existujú polynómy stupňa 5, ktorých korene sa nedajú vyjadriť žiadnym vzorcom obsahujúcim odmocniny...

Preto vo všeobecnosti, už v prípade 5x5 matíc, môžeme pri hľadaní vlastných hodnôt naraziť na veľké problémy, pričom korene char. polynómu budeme vedieť nájsť iba približne – numericky.

7

Príklad (nepríjemný)

Zoberme maticu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Potom zobrazenie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované touto maticou vo(b)r.



otáča rovinu o $90°$ proti smeru hod. ručičiek.

Aké by mali byť vlastné hodnoty?

Počítajme $\chi_A = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ $\qquad \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

• (Zaviesť komplexné čísla, pomocou $i^2 = -1$)

sem 18.2.2014 | sem 17.2.2015

• Aké sú vlastné vektory?

Pre $\lambda_1 = i$ máme $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} x = 0 \to x_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

pre $\lambda_2 = -i$ máme $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} x = 0 \to x_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

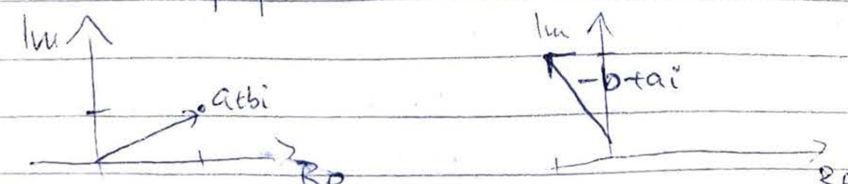
Lenže tieto vektory nepatria do $\mathbb{R}^2$ ale do $\mathbb{C}^2$!

Ako tomu správne rozumieť?

- násobenie reálnym číslom znamená natiahnutie/stiahnutie, ale násobenie komplexným číslom znamená okrem prípadného natiahnutia/stiahnutia aj otočenie.

sem 15.2.2012

V špeciálnom prípade: $(a+bi)\cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$



sem 11.2.2019 | I

M 12.2.2013

SEM 10.2.2009

otočenie o $90°$.

Takže matica otočenia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [illegible] komplexné hodnoty, [illegible] prislúchajú vektory spĺňajúce $Ax = \lambda x$, ale [illegible], že na A sa môžeme pozrieť aj ako na [illegible]

sem 24.2.17 [illegible] $i^2 \to i^2$. Viac pri tzv. komplexifikácii!