21

- Ešte pár slov k charakteristickému polynómu

Povedali sme si, že pre $n \times n$ maticu A je jej charakteristický polynóm:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Teraz nejaké doplňujúce tvrdenia o tomto polynóme a možno aj viac..

<u>Tvrdenie</u> Charakteristický polynóm $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ má pre $n \times n$ maticu A tvar:

$$\chi_A = (-1)^n \lambda^n + c_{(n-1)} (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + \dots c_1 \lambda + c_0$$

t.j. je to polynóm stupňa práve n.

Navyše: $\quad c_{n-1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ (stopa matice A)

$$c_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(A).$$

<u>Dôkaz</u> Pre výpočet charakteristického polynómu $\chi_A(\lambda)$ použime vzorec

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{\sigma\text{-perm.}} (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} (A-\lambda I)_{1\sigma(1)} (A - \lambda I)_{2\sigma(2)} \cdots (A - \lambda I)_{n\sigma(n)}$$

Každý z $n!$ mnohočlenov obsahuje súčin n políčok matice $A - \lambda I$. Aké sú možné mocniny λ, ak by sme takýto mnohočlen roznásobili?

λ sa vyskytujú iba na diagonále, preto najvyššia mocnina, ktorú môže dosiahnuť je n, a to iba v tom prípade ak je všetkých n členov diagonálnych, t.j. máme identickú permutáciu.

Potom: $\quad (-1)^0 (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) =$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \text{nižšie členy}$$

Ak permutácia σ nie je identita, potom sa od id líši aspoň v dvoch hodnotách t.j. diagonálnych políčok môže mať max. $n-2$. Preto všetky ostatné permutácie ~~do~~ k mocninám λ^n, λ^{n-1} neprispievajú.

Takže ukázali sme: $c_n = (-1)^n$

$c_{n-1} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \text{stopa } A$.

Zvyšok: ① Chceme ukázať, že $c_0 = \det A$. Teda to je absolútny člen. Lenže $\chi_A(0) = (-1)^n \cdot 0^n + c_{n-1} 0^{n-1} + \dots + c_1 0 + c_0 = c_0$

absolútny člen je práve hodnota polynómu pre $\lambda = 0$.

Ale $\chi_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$.

② Vyjdime z rovnosti

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

- toto platí preto, lebo ak λ_i je koreňom $\chi_A(\lambda)$, $\lambda_i - \lambda$ ho delí.
- ~~absolútny~~ člen pri λ^n je $(-1)^n$.

Potom roznásobením: $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda) =$

$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

čo sme chceli.

t.j. vlastných hodnôt pre $n \times n$ maticu A je naozaj práve n.

Diagonálny tvar matice

Videli sme, že vlastné vektory a vlastné hodnoty vypovedajú veľa o zobrazení danom maticou A.

A na cvičení ste tiež mali čosi o diagonalizácii. Takže to dajme dohromady:

Tvrdenie

- Predpokladajme, že pre maticu A existuje n lineárne nezávislých vlastných vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$, spĺňajúcich $Ax_i = \lambda_i x_i$. Potom platí: $S^{-1}AS = \Lambda = ($ kde S je matica tvorená stĺpcami $x_1, \dots, x_n$.

Dôkaz: n rovníc $Ax_i = \lambda_i x_i$ môžme zoradiť vedľa seba a prepísať

$$AS = A \overset{S}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Lenže matica napravo sa dá napísať ako

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}^{S} \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}^{\Lambda}.$$

Overte si...

Preto platí $\boxed{AS = S\Lambda}$

alebo inak $\boxed{S^{-1}AS = \Lambda \quad \text{či} \quad A = S\Lambda S^{-1}}$,

- Existencia inverznej matice S^{-1} je zabezpečená tým, že jej n-stĺpcov, vektorov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je lineárne nezávislých.

Poznámky.

(1) Ak má $n \times n$ matica A n rôznych vlastných hodnôt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, potom sú ~~tieto~~ k nim prislúchajúce vl. vektory lineárne nezávislé. (dôkaz neskôr)
Každá matica s n rôznymi vlastnými hodnotami sa dá diagonalizovať.

(2) Diagonalizačná matica S nie je jednoznačná.
- vl. vektor x_i sme mohli prenásobiť $\underbrace{\text{konštantou}}_{\text{nenulovou}}$: $A(cx_i) = cAx_i = c\lambda x_i = \lambda(cx_i)$ a opäť dostať vl. vektor.
- ~~xxxxxxxx~~ viac-násobné vlastné hodnoty tiež môžu pridať nejednoznačnosti. Extrémny prípad je matica I. Potom $I = SIS^{-1}$, čiže I je svojim vlastným diagonálnym tvarom, S môže byť ľubovoľná invertibilná matica. Toto je spôsobené tým, že každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ je vlastným vektorom matice I, **každá báza je** bázou vl. vektorov.

(3) Existujú matice, ktoré nie sú diagonalizovateľné.

Príklad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, potom $\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2$

Vl. hodnoty
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Vlastný vektor:
$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ riešenie $- \; t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

V tomto prípade je 1 dvojnásobnou vlastnou hodnotou. Presnejšie povedané, jej algebraická násobnosť je 2. (t.j. 1 je dvojnásobným koreňom $\chi_A(\lambda)$).

Lenže jej <u>geometrická násobnosť</u> (t.j. $\dim N(A-\lambda I)$) je iba 1.

Preto existuje iba 1 lineárne nezávislý vlastný vektor a štvorcová matica S sa nedá skonštruovať.

Je toto dôkaz? Skúsme ešte raz:

<u>Dôkaz</u> Vlastné hodnoty matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Ak by existovala diagonálna matica Λ s vl. hodnotami na diagonále, musela by to byť $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
Lenže potom: $S^{-1}AS = I$ alebo $A = SIS^{-1} = I$.
Naopak A nie je I (dvojka nad diagonálou!) žiadne také S nemohlo existovať.

Naspäť k odvodzovaniu:

<u>Tvrdenie</u> Ak vlastné vektory $x_1, x_2, \dots, x_k$ zodpovedajú <u>rôznym</u> vl. hodnotám $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, potom sú lineárne nezávislé.

<u>Dôkaz</u> Dokážme najprv pre $k=2$, postupujme sporom.
Nech x_1, x_2 sú lineárne nezávislé a ich lineárna kombinácia je nulová: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$.
Potom prenásobením A.

$$A(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \qquad / - \lambda_2 (c_1 x_1 + c_2 x_2)$$

Odpočítaním:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) x_1 = 0$$

Potom: $x_1 \neq 0$ (vl. vektor), $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ (lebo sú rôzne), teda jedine $c_1 = 0$. Podobne pre c_2, čiže iba triviálna kombinácia môže dať nulu.

Rovnaké zdôvodnenie sa dá použiť aj pre vyšší počet vektorov. Predpokladajme, že

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0 \qquad (*)$$

Prenásobením A a odpočítaním λ_k násobku tejto rovnice (alebo ...) dostaneme

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k) x_2 + \dots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = 0$$

Rozdiely $(\lambda_i - \lambda_k)$ sú nenulové, preto ak vektory $x_1, \dots, x_{k-1}$ sú LN, budú takí aj vektory $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$.

Pozn Typická matica (z väčšej priľady) má n rôznych vl. hodnôt, preto je diagonalizovateľná.

Príklady použitia diagonalizácie

Príklad 3 Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sme minule spočítali:

- char. polynóm: $\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$
- vl. hodnoty $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- vlastné vektory $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, $x_2' = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- diagonalizačná matica $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $S^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{(1+\sqrt{5})}{2} & 1 \end{pmatrix}$

po troche počítania

čiže:

$$S^{-1}AS = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{(1+\sqrt{5})}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \Lambda$$

VYMENIŤ PORADIE

① Aké sú mocniny A?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Nejaký vzor?

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

kde $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ sú členy Fibonacciho postupnosti

Prečo to tak je? Lebo $A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sedí ✓

s súčinom) $A - \lambda_k I$

Matematickou indukciou predpokladajme

2.6. $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$, potom $A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1}+F_n & F_n+F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

(2) Keď vieme diagonalizovať maticu A, aké sú jej mocniny

$A = S \Lambda S^{-1}$ čomu sa rovná A^k?

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-krát}} = \underbrace{(S\Lambda \cancel{S^{-1}})(\cancel{S}\Lambda \cancel{S^{-1}}) \ldots (\cancel{S}\Lambda S^{-1})}_{k\text{-krát}} =$$

$$= S \Lambda^k S^{-1}.$$

Lenže ak $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, potom $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Pozorovanie: Umocňovať diagonálne matice je jednoduché, na rozdiel od všeobecných.

Teraz naspäť k našej matici, ktorá generovala Fibonacciho postupnosť - minule sme si spočítali jej vlastné hodn., vektory.

$$\boxed{\text{Návrat, dopočítanie všeobecného vzorca pre } n\text{-tý člen Fibonacciho postupnosti.} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

sem 25.2.2014 dať ich sem:

- Zamyslenie: Čo sme tu robili? Mali sme štvorcovú $n \times n$ maticu A, počítali sme jej mocniny A^k. Lenže A reprezentuje nejaké lineárne zobrazenie α z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$.

$\alpha_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \to \ldots \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n}_{\alpha^k}$$

Ak ho k-krát opakujeme, dostaneme α^k. (skladanie zobrazení $\Leftrightarrow$ násobenie matíc)

Vo všeobecnosti je počítanie k-tej mocniny komplikované. Ak sa ~~matica~~ diagonálna, tak vieme, že prvý vlastný vek. potom maticu, ktorej mocniny počítame $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

27., 31

sem 22.2.2012

~~[illegible]~~ následne λ_1-krát, i-ty λ_i krát.

Ak to zopakujeme k-krát, dostaneme ~~[illegible]~~ zobrazenie, ktoré posiela

$$x_1 \longmapsto \lambda_1^k x_1$$
$$\vdots$$
$$x_n \longmapsto \lambda_n^k x_n$$

pre $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

sem niekde 17.2.2009

lebo $\alpha^k(x) = c_1\alpha^k(x_1) + \dots + c_n\alpha^k(x_n)$ lineárne

$= c_1\lambda_1^k x_1 + \dots + c_n\lambda_n^k x_n$. sem 24.2.2015

Ak tvoria ~~Ba~~ $x_1, x_2, \dots, x_n$ bázu $\mathbb{R}^n$, tento predpis jednoznačne opisuje lineárne zobrazenie, navyše x_i sú vlastné ~~hodnoty~~ vektory matice A^k, λ_i^k sú vlastné hodnoty. ← sem 19.2.2013

Takže zapíšme to wyjáre! ← sem 28.2.2017

Tvrdenie Vlastné hodnoty matice A^k sú $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$, k-te mocniny vlastných hodnôt matice A. Každý z vlastných vektorov matice A je ~~bude~~ vlastným vektorom matice A^k, a ak S je diagonalizujúca matica pre A, tak diagonalizuje aj A^k.

Dôkaz: $Ax_i = \lambda_i x_i$, prenásobením maticou A zľava

$A^2x_i = A(Ax_i) = A\lambda_i x_i = \lambda_i A x_i = \lambda_i \lambda_i x_i = \lambda_i^2 x_i$ atď.

~~$A^k x_i =$~~ Pre diagonalizáciu

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\dots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS^{-1}.$$

Pozn Ak je A regulárna matica, tato pravidlo platí aj pre záporné exponenty t.j. vlastné hodnoty A^{-1} sú $(\lambda_i)^{-1} = \frac{1}{\lambda_i}$.

Dôkaz: $Ax = \lambda x$ potom po prenásobení A^{-1}:

$$x = \lambda A^{-1} x$$
$$\frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x.$$

(Cvičenie)
(dú 0)

sem 25.2.19 II

...šak pozrieme na vlastné vektory,