28/3.2

Diferenčné rovnice a ~~exponenty~~ mocniny A^k

Videli sme, že matica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nejakým spôsobom súvisela s Fibonacciho číslami. Prečo to tak je?

To s čím máme je rekurentná rovnica:

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a predpis $\boxed{F_{k+2} = F_{k+1} + F_k}$

(Pozn. v knihe o biológii) [fylotaxia, rast púčikov

- Ako nájsť vyšší člen postupnosti? – Náhodou sme sa dopracovali k vzorcu...
  Ale ako vidieť, že to nebola náhoda?

- Skúsme nahradiť rovnicu $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ maticovou rovnicou
$$u_{k+1} = A\, u_k.$$

A to sa podarí ak u_k zvolíme: $u_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$

Potom $u_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_{k+1} + F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$.

A toto je naša matica A,

Potom $u_{k+1} = A \cdot u_k = A^2 u_{k-1} = \dots = A^k \cdot u_1 = \underline{A^{k+1} u_0}$.

Tvrdenie o diagonálnych maticiach a diferenčných rovniciach.

Tvrdenie Ak sa dá matica A diagonalizovať $A = S \Lambda S^{-1}$, potom
$$u_k = A^k u_0 = \underbrace{(S\Lambda S^{-1}) \dots (S \Lambda S^{-1})}_{k} u_0 = S \Lambda^k S^{-1} u_0$$

Stĺpce matice S sú vlastné ~~hodnoty~~ vektory ~~matice~~ A, a zvolením $S^{-1} u_0 = c$ riešenie dostane tvar:

$$u_k = S \Lambda^k c = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n$$

– riešenie je kombináciou "čistých" ~~exponenciálnych~~ mocninových riešení

3.3

Špeciálne pre $k=0$ dostávame:

$$u_0 = S\underbrace{\Lambda^0}_{I} \underbrace{c}_{\boxed{S^{-1}u_0}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

← rozvit

- úlohou koeficientov c je trafiť sa do počiatočnej podmienky u_0.

Inými slovami ak $u_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vlastných vektorov, potom

$$u_k = A^k u_0 = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2 + \dots + c_n\lambda_n^k x_n$$

Markovovské procesy

Veľmi dávno, ešte v prvom semestri, v prvej úlohe, sme mali takúto úlohu:

- každý rok sa $\frac{1}{10}$ z ľudí mimo kalifornie do nej prisťahuje a $\frac{2}{10}$ ľudí čo sú v kalifornii sa z nej odsťahujú.

To vedie k diferenčnej rovnici

y_0 - počet ľudí mimo CA
z_0 - počet ľudí v CA

Potom po 1. roku:

$$y_1 = 0.9\,y_0 + 0.2\,z_0$$
$$z_1 = 0.1\,y_0 + 0.8\,z_0$$

alebo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

takáto rovnica je samozrejme fiktívnym zjednodušením toho, čo sa v skutočnosti deje, ale slúži ako dobrý model tzv. Markovovskej matice, ktorá opisuje tzv. Markovovský proces:

1) počet ľudí zostáva konštantný
2) počty ľudí mimo a vo vnútri nikdy nemôžu byť záporné
3) história sa zabúda - u_{k+1} závisí výlučne od u_k a stavy $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ nehrajú rolu.

(to je dôležité ak prejdeme k tzv. stochastickým diferenčným rovniciam

3.4

a zložky v matici reprezentujú pravdepodobnosti)

Ako sa tieto veci prejavujú v matici?

1) každý stĺpec má súčet 1 (lebo ľudia sa nestrácajú)
2) matica má nezáporné zložky
3) $u_{k+1} = A u_k$ (t.j. žiadna priama závislosť od minulosti)

Poďme teraz rovnicu riešiť – vieme, že ju treba diagonalizovať, pomocou čoho nájdeme všeobecné riešenie.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$$

potom $\lambda_1 = 0.7$, $\lambda_2 = 1$

vlastné vektory: $\lambda_1 = 0.7$ $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ zvolíme

$\lambda_2 = 1$ $\begin{bmatrix} -0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,2 \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Preto $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

potom A^k a distribúcia po k rokoch bude:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0.7^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(po vynásobení)}}{=} (y_0+z_0)\,1^k \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)(0.7)^k \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Z toho sa dá odhadnúť, čo sa bude diať asymptoticky pre $k\to\infty$ máme:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0+z_0)\,1 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}. \qquad \left(\text{lebo } (0.7)^k \to 0\right)$$

Pozn.

- čiže bez ohľadu na začiatočné podmienky (y_0, z_0) stabilný stav, ku ktorému nakoniec systém dokonverguje je rovnaký – $2/3$ ľudí mimo CA, $1/3$ ľudí v CA

- ak je na úplnom začiatku stav 2:1, bude taký aj na konci roka (~~toto zodpovedá vlastnému vektoru vl. hodnotou 1~~)

- stabilný stav zodpovedá vlastnému vektoru pre $\lambda = 1$
$A x = 1 \cdot x$, t.j. matica prechodu nemení x.

Sem III
1.3.2016

Zhrnutie Markovská matica má nezáporné zložky, súčty vo všetkých stĺpcoch sú 1-ky. Potom:

a) $\lambda_1 = 1$ je vlastná hodnota
b) k nej zodpovedajúci vlastný vektor x_1 je nezáporný a zodpovedá stabilnému stavu $A x_1 = 1 \cdot x_1$
c) zvyšné vlastné hodnoty spĺňajú $|\lambda_i| \leq 1$
d) Ak má každá z mocnín A všetky zložky kladné, potom $|\lambda_i|$ sú ostro menšie ako 1.
V tom prípade každé riešenie $A^k u_0$ konverguje k násobku x_1 – k stabilnému stavu.

Pozn Na náš dynamický systém sme sa pozerali deterministicky – t.j. toľko a toľko ľudí (presné čísla) sa presunú, nové počty dostaneme prenásobením aktuálneho vektora nejakou maticou (presne).
Namiesto toho sa na dynamiku sťahovania môžeme pozrieť (realistickejšie?) ako na náhodný proces.
T.j. hodnoty v matici udávajú pravdepodobnosti –
človek mimo Kalifornie sa s pravdepodobnosťou 0.1 prisťahuje
človek v Kalifornii sa s pravdepodobnosťou 0.2 odsťahuje

Potom hodnota $A^k u_0$ $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ udáva pravdepodobnosti s akými sa človek po k rokoch nachádza v alebo mimo CA.
A pravdepodobnosti sa sčítajú do jednotky a zjavne byť nezáporné – čo nám opäť dáva vlastnosti Markovskej matice prechodu.

Pzn bot, náhodná prechádzka internetom, "vlastný vektor internetu"

3.6

Dôkaz zhrnutia
(Iba časť a) a dôsledok d))

Všimnime, že $\lambda = 1$ je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice

$(A - 1 \cdot I)$ by teda mala byť singulárna. Lenže každý stĺpec matice $A - 1 \cdot I$ má súčet $1 - 1 = 0$. To znamená, že riadky matice $A - 1I$ sa vysčítajú do nulového riadku, sú lineárne závislé, matica $A - I$ je singulárna, $\lambda = 1$ je vlastnou hodnotou.

Ak má matica n lin. nezávislých vl. vektorov, potom má všeobecné riešenie tvar:

$$u_k = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n$$

pokiaľ sú všetky $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ v absolútnej hodnote menšie ako 1, potom

$$\lim_{k \to \infty} u_k = c_1 1^k x_1 = \boxed{u_\infty = c_1 x_1}.$$

~~(dokaz, že $(1,1,\dots,1)$ je vl. vektor A^T je cvičenie)~~

Pozorovanie

Porovnaním diferenčných rovníc pre Fibonacciho čísla (vl. hodnoty $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$)

a postupnosť $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$

a pre Markovov proces (vl. hodnoty 1 a 0.7)

vidíme odlišné správanie: ~~pre~~

- Fibonacciho čísla "utekajú" do ∞
- populácie v našom príklade konvergujú k stabilnému stavu

Zodpovedné sú za to, samozrejme, vlastné hodnoty.

Ak by vyšli všetky vlastné hodnoty (v abs. hodnote) < 1, potom by konvergovalo riešenie k nulovému riešeniu

$$u_k \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Preto má zmysel takáto terminológia:

3.7/4.1

Def Diferenčná rovnica $u_{k+1} = A u_k$ je

a) stabilná ak vl. hodnoty matice A splňajú $|\lambda_i| < 1$

b) neutrálne stabilná ak niektoré $|\lambda_i| = 1$ a ostatné $|\lambda_j| < 1$

c) nestabilná ak aspoň jedna vl. hodnota $|\lambda_i| > 1$.

sem 29.2.12

$\boxed{\text{sem 24.2.2009}}$ príklad s epidémiami a zmenou λ pomocou opatrení

sem 3.3.15

Aplikácie do Ekonómie/Ekonomiky

Na tejto prednáške si ukážeme, ako sa dá teória spojená s vlastnými vektormi a hodnotami aplikovať v ekonomických modeloch.

Leontiefova vstupno-výstupná matica (Wassily Leontief, Nobelova cena za ekonómiu v. 1973)

- alebo produkčná matica

• obsahuje informácie o vzájomnom prepojení sektorov ekonomiky

transponovaná →

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.17 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{(oceľ)} \\ \text{(potraviny)} \\ \text{(pracovné sily)} \end{array} \end{array}$$

zložka a_{ij} udáva množstvo produktu i potrebné na výrobu jednotkového množstva produktu j.

(vstup i, výstup j)

sem 7.3.2017

sem 4.3.2019

Otázka: 1) Môže ekonomika vyprodukovať $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ - oceľe, potravín, práce ? V zmysle -

$y = [\text{vyrobené} - \text{spotrebované}] = [\text{výstup} - \text{vstup}]$

3) Aké by mali byť ceny ~~výrobkov~~ komodít aby reprezentovali produkčné vzťahy – t.j. peniaze by sa nemali hromadiť v žiadnom sektore.

2) Ak ekonomika vyprodukuje viac, ako spotrebuje, máme rast. Pri akej delbe zdrojov dostaneme najrýchlejší rast? Koľko to bude?

sem 22.13.