4.2 OTVORENÝ MODEL

1 otázka zodpovedá tzv. otvorenému modelu ekonomiky

Ak vyprodukujeme $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ jednotiek jednotlivých tovarov, potrebujeme na to Ap jednotiek tovarov na vstupe.

$$Ap = (a_1)p_1 + (a_2)p_2 + (a_3)p_3$$

Čiže čistá produkcia je: $p - Ap = \cancel{y} = (I-A)p = y$

Rovnica, ktorú z toho dostávame je $p = (I-A)^{-1}y$.
Matica $(I-A)$ sa nazýva technologická matica.
Zdá sa, že odpoveďou by mala byť práve existencia inverznej matice k technolog. matici. Je tu však komplikácia.

Chceme aby y (očakávaná čistá produkcia) aj p (produkcia) boli vektory s nezápornými zložkami.

Nakoľko $p = (I-A)^{-1}y$, postačovalo by aby $(I-A)^{-1}$ mala nezáporné zložky.

Q: Kedy má $(I-A)^{-1}$ nezáporné zložky?

odpoveď: A nesmie byť príliš veľká.
- Ak produkcia spotrebuje príliš veľa, nezostáva nám kladný výsledok na výstupe. A veľkosť matice súvisí práve s vlastnými hodnotami.

Tvrdenie: Označme λ_1 ako najväčšiu vlastnú hodnotu matice A, potom:
Ak $\lambda_1 > 1$, $(I-A)^{-1}$ nie je nezáporná matica
Ak $\lambda_1 = 1$, $(I-A)^{-1}$ neexistuje
Ak $\lambda_1 < 1$, potom ~~môžeme použiť takto~~:

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots$$

čo je súčet nezáporných matíc.

Dôkaz

Ako to ukázať? (Použiť Perronovu-Frobeniovu vetu) důkaz v knižke
- Tá hovorí niečo takéto:

4.3

Veta Ak A je matica s nezápornými zložkami, potom pre λ_1 najväčšiu vl. hodnotu má x_1 kladné zložky.

Preto:

1) ak $\lambda_1 > 1$ a x_1 je vlastný vektor matice A, potom x_1 je aj vlastný vektor matice $(I-A)$ (vl. hodnota $1-\lambda_1$) a aj $(I-A)^{-1}$ (vl. hodnota $\frac{1}{1-\lambda_1}$)

Ak $\lambda_1 > 1$, je toto číslo záporné. Preto $(I-A)^{-1} x_1 = \frac{1}{(1-\lambda_1)} x_1$ posiela kladný vektor x_1 na záporný násobok. Matica $(I-A)^{-1}$ nemôže byť nezáporná.

2) Ak $\lambda_1 = 1$, potom $\det(A - 1 \cdot I) = 0$, čiže $I-A$ je tiež singulárna

3) Ak $\lambda_1 < 1$, potom $A^k \to 0$ a nekonečný rad

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots$$ konverguje. [podobne ako inf. geom. rady

Vynásobením $(I-A)$ dostaneme:

$$(I-A)(I+A+A^2+A^3+\dots) = I + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{A^3} + \dots - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cancel{A^3} - A^4 - \dots = I$$

■

Pr.: Matica A, ktorú sme tu mali na úvod má vlastné hodnoty $\lambda_1 =$ [illegible], $\lambda_2 =$, $\lambda_3 =$, čiže je dobrá — dá sa vyprodukovať všetko...

3 otázka Uzavretý model

vstupno-výstupný

Model sa nazýva uzavretý ak sa všetka produkcia opäť spotrebuje, nič sa nepredáva mimo systém.

Potom sa význam zložiek produkčnej matice A zmení:

v stĺpci j máme rozdelenie produktov sektoru j medzi ostatné sektory.

	pol.	stav	odev.
poľn.	0.4	0.2	0.3
stav.	0.2	0.6	0.4
odevníctvo	0.4	0.2	0.3

T.j. zložka a_{ij} udáva podiel odvetvia i na celkovej produkcii odvetvia j.

nakoľko sa "nič nestráca" súčty spotrebovanej produkcie musia dať 100%, t.j. súčty po stĺpcoch dávajú 1-ku, ide o Markovovskú maticu.

Ako chápať
~~čo znamená, keď~~ prenásobenie tejto matice vektorom $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$?

$(0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3)$ – ak p_1, p_2, p_3 sú ceny
potom označuje celkové náklady na na produkciu odvetvia č.1 – poľnohosp.

Keďže náklady = cena produktu (ani peniaze sa nestrácajú)
máme rovnice:

$$0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3 = p_1$$
$$0.2 \cdot p_1 + 0.6 p_2 + 0.4 p_3 = p_2$$
$$0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3 = p_3$$

Alebo $A \cdot p = I p$, $(A - I)p = 0$.

riešením je vektor $p = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, čiže ceny pri statickej obehu by mali byť také aby $\boxed{\text{cena poľn} = \text{cena odevn} = \tfrac{2}{3}\text{ cena stav.}}$

(2) otázka Von Neumanov model rastúcej ekonomiky.
(podľa času ...)
skôr nie – odkaz na Emilku.

sem 8.3.16 IV

4.5

Matice a diferenciálne rovnice

Začnime s niečím jednoduchším:

úroky: Ako sa počítajú úroky. $k=5$

8% p.a. úročime raz ročne po k rokoch $(1{,}08)^k p_0$

8% p.a. úročime raz za štvrťrok po k rokoch $(1{,}02)^{4k} p_0$

8% p.a. úročime raz za mesiac po k rokoch $\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12k} p_0$

8% p.a. úročime denne po k rokoch $\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365k} p_0$

ako by to bolo ak by sme úroky pripisovali kontinuálne?

8% p.a. spojité úročenie po k rokoch :

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{0.08}{t}\right)^{t\cdot k} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{0.08}{t}\right)^{\left(\frac{t}{0.08}\right)0.08\cdot k}$$

$$= e^{0.08\cdot k} = \ldots$$

iný pohľad: diferenčná rovnica $\Delta p = p_1 - p_0 = p_0 \cdot \text{úrok}$

$p_1 = (1+\text{úrok})\, p_0$

riešenie poznáme: $p_k = (1+\text{úrok})^k \cdot p_0$

čisto exponenciálne

v spojitom prípade:

$$\frac{dp}{dt} = p\cdot \text{úrok}$$

riešenie : $p(t) = e^{\text{úrok}\cdot t}$

naozaj $\left(e^{\text{úrok}\cdot t}\right)' = \text{úrok}\left(e^{\text{úrok}\cdot t}\right)$ ✓ splnená.

Teraz bude našou snahou aplikovať túto vec na matice.

tu sme si ukázali príklad exponenciálneho rastu/poklesu.

- zmena premennej x závisí lineárne od aktuálnej hodnoty x

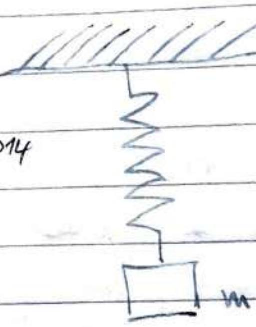
p + príklady: úroky, rast populácie rozpad rádioaktívneho prvku

riešením je funkcia $x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha t}$ SEM 10.3.2015

$\dot{x}(t) = x_0 \cdot \alpha\, e^{\alpha t} = \alpha\, x(t)$

4.6

Príklad Kmitajúca pružinka (alebo harmonický os…



- čo o tom vieme - bude to kmitať
- prečo? lebo platí niečo ako Hookov zákon, ktorý hovorí o tom akou silou pôsobí pružina proti svojmu natiahnutiu / stlačeniu

sem 11.3.2014 →

- nebudeme zachádzať do fyzikálnych detailov, napíšme rovno rovnicu

$$\boxed{F = \boxed{ma = -kx}}$$

zrýchlenie, poloha

k je kladná konštanta - tuhosť, s patričným fyzikálnym rozmerom.

Ďalej vieme, že zrýchlenie $a = v'$ je derivácia rýchlosti
a rýchlosť $v = x'$ je derivácia polohy

Čiže rovnicu môžme prepísať ako

$$ma + \frac{k}{m}x \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Riešením je funkcia spĺňajúca túto rovnicu.

Ako hľadať riešenie? Kde sú matice?

sem 14.3.2017 →

Pointa bude, podobne ako pre Fibonacciho čísla, v nahradení jednorozmernej premennej x(t) pre dif. rovnicu 2. st. neznámym vektorom pre dif. rovnicu 1. stupňa.

$$u = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

potom $$u' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Au$$

Aké riešenie očakávať? Rovnica sa podobá na tie…

4.7

a) Kde sme mali exponenciálne riešenia, skúsme

$$u(t) = u_0 \cdot e^{At}$$

Čo by to malo byť? ← sem 7.3.17

~~Skúšania~~ Pozrime sa na vlastné vektory matice A: λ_1, λ_2 vl. hodnoty
y_1, y_2 vl. vektory

ak $Ay_1 = \lambda_1 y_1$,
skúsme nájsť riešenie v tvare
$$u(t) = f(t) \cdot y_1$$

$$f'(t)\, y_1 = u' = Au = A f(t) y_1 = f(t) A y_1 = f(t) \lambda_1 y_1$$

čo je $f'(t) = \lambda_1 f(t)$ - riešením je exponenciálna funkcia
$$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot y_1$$

Podobná vec sa dá spraviť aj pre druhú vlastnú hodnotu λ_2 a dostať:
$$c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} y_2.$$

Všeobecné riešenie bude mať, vzhľadom na linearitu, tvar

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2}$$ ← sem 3.3.09

sem 17.3.19 / IV

čo sa dá prepísať ako:

$$\boxed{u(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

Odkiaľ sú $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$? Keďže v čase 0 máme $u(0) = u_0$
malo by byť $u_0 = c_1 \underbrace{e^{0t}}_{1} y_1 + c_2 \underbrace{e^{0t}}_{1} y_2$

teda $u_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

alebo $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = S^{-1} u_0$

sem 5.3.13

5.1 Dajme to dohromady: všeobecné riešenie rovnice

$$\boxed{u' = Au}$$

má tvar

$$u(t) = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boxed{S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} S^{-1} u_0}$$

kde S je diagonalizačná matica matice A, $A = S\Lambda S^{-1}$

Pozn ① Ak by sme sa inšpirovali 1-rozm. prípadom, mohli by sme písať:

$$u(t) = e^{At} u_0 = S e^{\Lambda t} S^{-1} u_0$$

To treba chápať ako: pre $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ bude jej exponenciála

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Pozn ② Podobné zdôvodnenie by fungovalo aj pre diagonalizovateľnú $n \times n$ maticu, matica $e^{\Lambda t}$ v strede by bola diagonálna s členmi $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

Skôr ako sa vrátime k riešeniu pohybovej rovnice pružinky pozrime sa na maticové exponenciály.

Funkcia $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ priraďuje reálnemu číslu $x \mapsto e^x$

Podobne maticová funkcia priradí matici $A \mapsto e^A$ (resp. $At \mapsto e^{At}$).

Na analýze ste počuli, že e^x sa dá vypočítať (definovať) pomocou nekonečného radu (Taylorov rozvoj):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$