Ak by sme v tejto nekonečnej sume nahradili číslo x maticou At, dostaneme:

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots}$$

Dá sa overiť, že takto definované umocňovanie má základné vlastnosti:

- $(e^{As})(e^{At}) = e^{A(s+t)}$
- $e^{At} \cdot e^{-At} = \cancel{I}\, e^{A\cdot 0} = I$
- $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A e^{At}$

~~Ale~~ Ale pozor, neplatí $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$ (násobenie matíc nemusí byť komutatívne)

Z poslednej rovnice plynie, že

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At} \cdot u_0\right) = A \cdot e^{At} \cdot u_0$$

– čím sme dostali riešenie rovnice $u' = Au$.

Týmto sme dostali dva rôzne opisy matice e^{At} pre diagonalizovateľné matice, a bolo by dobré aby súhlasili. A naozaj:

$(A = S\Lambda S^{-1})$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = I + S\Lambda S^{-1}t + \frac{(S\Lambda S^{-1})^2 t^2}{2!} + \frac{(S\Lambda S^{-1})^3 t^3}{3!}$$

$$= S\left(I + \Lambda + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \dots\right) S^{-1} = S e^{\Lambda t} S^{-1} \quad ✓$$

Vráťme sa naspäť ku kmitajúcej pružine. Matica, ktorá popisovala jej pohyb bola $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}$.

Potrebujeme spočítať jej vlastné hodnoty, vlastné vektory, atď.

Char. polynóm det $\chi_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}$

5.3

• Tu si treba uvedomiť, že číslo k udáva tuhosť pružiny. Ak si rozmyslíme fyzikálnu interpretáciu (pružina kladie odpor voči naťahovaniu/stláčaniu) musíme mať $k > 0$. To ale vedie ku komplexným vl. hodnotám:

vl. hodnoty $$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m}}$$

Počítajme ďalej:

vlastné vektory

$\lambda_1 = i\sqrt{k/m}$ $$\begin{bmatrix} -i\sqrt{k/m} & 1 \\ -k/m & -i\sqrt{k/m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{k/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -i\sqrt{k/m}$ $$\begin{bmatrix} i\sqrt{k/m} & 1 \\ -k/m & i\sqrt{k/m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Preto diagonalizačná matica S bude $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{k/m} & -i\sqrt{k/m} \end{pmatrix}$.

Po chvíli počítania dostaneme:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{2i\sqrt{k/m}} \\ 1/2 & \frac{-1}{2i\sqrt{k/m}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{k/m}\,t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{k/m}\,t} \end{pmatrix}.$$

Z toho nie sme veľmi múdrejší, pokiaľ nebudeme vedieť, že

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$$

(Videlo sa niekedy niečo takéto?) (Vrátime sa k tomu)

Takže pokračujme s dosadením: $e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t & \\ 0 & \cos\sqrt{\frac{k}{m}} \ldots \end{pmatrix}$

Roznásobením:

$$S e^{\Lambda t} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{2i\sqrt{k/m}} \\ 1/2 & \frac{-1}{2i\sqrt{k/m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} & \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2i\sqrt{\frac{k}{m}}} \\ \frac{i\sqrt{\frac{k}{m}}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)}{2} & \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k/m}\,t & \frac{\sin\sqrt{k/m}\,t}{\sqrt{k/m}} \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t & \cos\sqrt{k/m}\,t \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} t}.$$

5.4.

Použili sme vzťahy :
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \qquad \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

Riešenie pohybovej rovnice preto bude:
$$\binom{x}{\dot{x}} = u(t) = e^{At}\cdot u_0 = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k/m}\,t & \frac{1}{\sqrt{k/m}}\sin\sqrt{k/m}\,t \\ -\sqrt{k/m}\sin\sqrt{k/m}\,t & \cos\sqrt{k/m}\,t \end{pmatrix} (u_0).$$

Takže ak máme dané počiatočné podmienky $u_0 = \binom{x_0}{v_0}$, počiatočnú polohu a rýchlosť, vieme spočítať polohu a rýchlosť v čase t.

Pozn. Vidíme tu sínusy a kosínusy, ktoré sme vlastne čakali, pričom perióda oscilácie bude závislá od $\sqrt{k/m}$ - tuhosti pružiny.

—▷ Stabilita riešení

Podobne ako pre diferenčné rovnice, môžeme sa baviť o stabilite riešení diferenciálnych rovníc. Vieme, že všeobecné riešenie je kombináciou čistých exponenciálnych riešení:

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} y_n}$$

Preto veľkosť vektora $u(t)$ bude závisieť hlavne od správania sa funkcie $e^{\lambda t}$ pre $t \to \infty$. Výsledok môžeme zhrnúť takto:

Riešenie diferenciálnej rovnice $\frac{du}{dt} = Au$ je

stabilné — ak $e^{At} \to 0$, a to je vtedy, keď $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ pre všetky i

neutrálne stabilné — ak e^{At} má ohraničenú veľkosť ale nejde do 0. To je vtedy, keď $\mathrm{Re}\,\lambda_i \le 0$ $(\forall i)$ a $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ pre nejaké j.

nestabilné — ak e^{At} je neohraničené, čo sa stane ak $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ pre nejaké i.

5.5. Vlastné hodnoty & vlastné vektory : reálne vs. komplexné

Na minulých dvoch prednáškach a dnes sme videli dôležité aplikácie teórie spojenej s vlastnými hodnotami a vl. vektormi.
- diferenčné a diferenciálne rovnice

V oboch prípadoch sme potrebovali lepšie rozumieť štruktúre vlastných vektorov a vl. hodnôt. Preto bude mať význam ďalej sa týmto téme venovať, hlavne teoreticky.

Okrem toho sa tu zrazu častejšie objavujú komplexné čísla
- je čas sa na ne pozrieť detailnejšie.

Čo sú komplexné čísla?
- vieme ich sčítať, násobiť a deliť
- majú viacero zápisov
- vieme ich kresliť, do Gaussovej roviny

- $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

- Pre komplexné čísla tiež vieme definovať normu (alebo dĺžku)

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = r$$

- A argument - to je presne uhol θ z druhého a tretieho popisu

- Každý z popisov je vhodný na opis iných operácií. Napríklad násobenie:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

t.j. normy sa násobia, argumenty sčítajú.
(to že sa to rovná, sa dá overiť sčítacími vzorcami pre cos a sin)

- Pre $z = a+ib$ môžeme definovať aj nemu komplexne združené číslo
$\overline{z} = a - ib$. (preklopenie okolo Re osi)

V polárnom zápise $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

5.6.

Vynásobením $z \cdot \bar{z}$ dostaneme $z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$
- na jednej strane nám to dáva predpis pre abs. hodnotu komplexného
- čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- ale tiež predpis pre prevrátenú hodnotu $\frac{1}{z}$, lebo

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}}$$

← V čitateli máme reálne číslo, ktorým vieme deliť ľahko.

sem 15.3.16

V

Posledná vec, ~~ku~~ ktorej sa musíme prizrieť je zápis $re^{i\theta}$ pomocou exponenciálneho zobrazenia. Čo to je?

Formálne môžme použiť Taylorov rozvoj:

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots =$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \dots$$

Každý nepárny člen obsahuje i alebo $-i$ (je rýdzo imaginárny) každý párny člen obsahuje iba reálne hodnoty. Rozdelíme to:

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos\theta + i\sin\theta$$

sem 18.3.2014

Ukáže sa, že to sú taylorove rozvoje pre funkcie $\cos\theta$ a $\sin\theta$. Týmto sme ukázali, že e^x, $\cos x$ a $\sin x$ spolu veľmi úzko súvisia. Preto pri počítaní pružinky vyšla exponenciálna funkcia, ktorá je vlastne kosínus. (lebo v exponente boli imaginárne veci).

Komplexné čísla a matice

Kde sme sa na lineárnej algebre stretávali s komplexnými číslami?

Prišla (reálna) matica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, spočítali sme jej vlastné hodnoty, ktoré vyšli $\pm i$. Preto sme pri hľadaní vlastných vektorov boli nútení riešiť sústavy $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hľadali sme nulový priestor komplexnej (!) matice.

5.7. / 6.1

Takže z matice $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, ktorá popisovala pekné zobrazenie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (otočenie o $90°$ proti smeru hodinových ručičiek) máme zrazu maticu $A-\lambda I$, ktorá prirodzene žije v $\mathbb{C}^2$.

Takže sme boli donútení opustiť priestor $\mathbb{R}^2$ a pozrieť sa na jeho rozšírenie $\mathbb{C}^2$ a tam spočítať vl. vektory.

sem 13.15 Tento proces sa nazýva komplexifikácia.

sem 17.3.12
Sem 21.3.17
Lepšie si ho ilustrujeme na nasledovnom: (PÍSOMKA!)

si sem
20.3.07
Def. Vektorový priestor V nad poľom skalárov $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_p)$ je množina spĺňajúca osem podmienok:

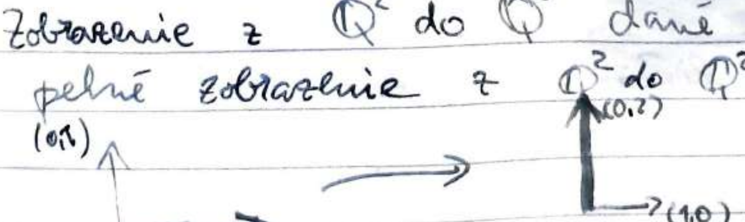
1) $v+w=w+v$ (komutatívne sčítanie vektorov)
2) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (asociatívnosť)
3) $\exists\, 0\in V:\quad 0+v=v+0=v$ (nulový vektor)
4) $(\forall v)\ \exists$ opačný vektor $v+(-v)=0$ (opačný prvok)
5) $1\cdot v=v$
6) $c_1(c_2 v)=c_1c_2 v$
7) $c(v+w)=cv+cw$
8) $(c_1+c_2)v=c_1v+c_2v$

Potom vektorové priestory nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ alebo $\mathbb{Q}$ sa v zásade líšia iba tým, aké skaláry pripúšťame.

- Takže rovnako, ako sme mali vektorový priestory $\mathbb{R}^n$ tvorený n-ticami reálnych čísel $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, budeme mať priestory $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$.

- Podobne všetky doterajšie dôkazy a pojmy a postupy ako eliminácia, lineárna závislosť, bázy, determinanty, štruktúra riešení lineárnych rovníc, dimenzia, hodnosť a pod. budú fungovať rovnako nad $\mathbb{R}$ ako nad $\mathbb{C}$ či $\mathbb{Q}$.

Príklad Zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$ dané maticou $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=A$ je pekné zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$



~~Ale vlastne~~ však Naozaj, racionálny bod $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ zobrazí na $\begin{pmatrix}q\\2p\end{pmatrix}$, čo je opäť bod s racionálnymi súradnicami

6.2

Lenže pri výpočte vlastných hodnôt a vl. vektorov matice A narazíme na problém:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2-2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

čiže vlastné vektory vyjdú: $\lambda_1=\sqrt{2}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ale tie nepatria do $\mathbb{Q}^2$. Vieme ich do roviny $\mathbb{R}^2$ nakresliť, aj si ich predstaviť, ale do $\mathbb{Q}^2$ nepatria. $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$

na scénu prichádza $(A-\mathbb{R}I)$

Preto pri počítaní vl. vektorov matice A musíme opustiť priestor $\mathbb{Q}^2$, pridať všetky iracionálne body a dostať $\mathbb{R}^2$. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))^2$
(minimalizuje body typu $a+b\sqrt{2}$, $(a,b\in\mathbb{Q})$)

Matica zobrazenia A zostane rovnaká, len ju teraz budeme vnímať ako maticu zobrazenia medzi $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2$

sem 18.3 2019

Niečo podobné sa deje, keď $\mathbb{R}^2$ nahradíme $\mathbb{C}^2$.

Ako sme konštruovali $\mathbb{C}$?

Im

Re

- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ Komplexné číslo $z=a+ib$ má dve zložky, ktoré sú samy o sebe reálne čísla. Preto môžeme $\mathbb{C}$ chápať ako $\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$.

Podobne $\mathbb{C}^n$ - množina n-tíc komplexných čísel bude

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ x_2+iy_2 \\ \vdots \\ x_n+iy_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^n} + i\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Každý vektor $z\in\mathbb{C}^n$ vieme zapísať ako vektor $x\in\mathbb{R}^n$ a plus vektor $iy\in i\mathbb{R}^n$. Preto $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$

Def Pre každý reálny vektorový priestor V (skaláry sú reálne) môžeme uvažovať jeho komplexifikáciu $V\oplus iV$, ktorú dostaneme ako súčet dvoch kópií V-čka (jednu reálnu, druhú imaginárnu

B.3

Násobenie ~~s~~ komplexným skalárom $(a+ib)$ definujeme ako

$$(\vec{v}+i\vec{w})(a+ib) = (a\vec{v} - b\vec{w}) + i(a\vec{w} + b\vec{v})$$

Ľahko sa presvedčíme, že naozaj $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, podobne $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$

Potom každé lineárne (reálne) zobrazenie $\alpha: V \to V$ sa dá rozšíriť na (komplexné) lineárne zobrazenie

$$\alpha': V+iV \to V+iV$$

dané predpisom $\alpha'(v+iw) = \alpha(v) + i\alpha(w)$.

Cvič. overiť, že ide o komplexné lin. zobrazenie.

sem 12.3.2013

Dĺžka v $\mathbb{C}^n$

Ako sme povedali, ~~že~~ veľká väčšina konceptov lineárnej algebry nezávisí od poľa skalárov, s ktorými pracujeme. Sú však aj výnimky – pokiaľ ide napr. o skalárny súčin.

V $\mathbb{R}^n$ sme mali $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

Takýto predpis ale pre $\binom{1}{i} \in \mathbb{C}^2$ nebude dávať veľmi zmysel: $1^2 + (i)^2 = 0$

ale $\binom{1}{i}$ je nenulový vektor, nemal by mať nulovú normu. ale $\binom{1}{i}$ je nenulový a nemal by mať nulovú normu.

Vhodnou náhradou je v $\mathbb{C}^n$ zvoliť normu

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2,$$

čo sa dá zapísať ako

$$\|x\|^2 = \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \dots + \overline{x_n}x_n \qquad (x_i \in \mathbb{C})$$

Ak zvolíme normu takto, bude sa dať vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:

$$\overline{x}^T \cdot y = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \dots + \overline{x_n}y_n$$