B.3

Násobenie ~~s~~ komplexným skalárom $(a+ib)$ definujeme ako

$$(\vec{v}+i\vec{w})(a+ib) = (a\vec{v}-b\vec{w})+i(a\vec{w}+b\vec{v})$$

Takto sa presvedčíme, že naozaj $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$, podobne $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n\oplus i\mathbb{R}^n$.

Potom každé lineárne (reálne) zobrazenie $\alpha: V\to V$ sa dá rozšíriť na (komplexné) lineárne zobrazenie $\alpha': V+iV \to V+iV$

daný predpisom $\alpha'(v+iw) = \alpha(v)+i\alpha(w)$.

Cvič. overiť, že ide o komplexné lin. zobrazenie.

sem 12.3.2013

Dĺžka v $\mathbb{C}^n$

Ako sme povedali, ~~sa~~ veľká väčšina konceptov lineárnej algebry nezávisí od poľa skalárov, s ktorými pracujeme. Sú však aj výnimky – pokiaľ ide napr. o skalárny súčin.

V $\mathbb{R}^n$ sme mali $\|x\|^2 = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$

Takýto predpis ale pre $\binom{1}{i}\in\mathbb{C}^2$ nebude dávať veľmi zmysel: $1^2+(i)^2=0$ ale $\binom{1}{i}$ je nenulový vektor, nemal by mať nulovú normu.

ale $\binom{1}{i}$ je nenulový vektor – nemal by mať nulovú normu.

Vhodnou náhradou je v $\mathbb{C}^n$ zvoliť normu
$$\|x\|^2 = |x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2,$$
čo sa dá napísať ako
$$\|x\|^2 = \overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2+\dots+\overline{x_n}x_n \qquad (x_i\in\mathbb{C}).$$

Ak zvolíme normu takto, bude sa dať vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:
$$\overline{x}^T y = \overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2+\dots+\overline{x_n}y_n$$

Def V $\mathbb{C}^n$ máme tzv. štandardný Hermitovský skalárny súčin daný $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \overline{x}^T y = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \dots + \overline{x}_n y_n.$$

Pozorovanie • ak by sme skúsili nejaké konkrétne vektory, rýchlo by sme si všimli, že

$\overline{y}^T x$ sa vo všeobecnosti nerovná $\overline{x}^T y$.

– t.j. súčin nie je symetrický

ale $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$

• dokonca ak x nahradíme cx, potom dostaneme $\langle cx, y \rangle = \overline{(cx)}^T y = \overline{c}\,\overline{x}^T y = \overline{c} \langle x, y \rangle$

– čiže nie je ani lineárny v prvej zložke.

– seskvilineárny $\langle x, dy \rangle = \overline{x}^T dy = d\,\overline{x}^T y = d \langle x, y \rangle$

Poznámky • vektor x^T sme nazývali transponovaným k x, vektor $\overline{x}^T$ (teda transponovaný a komplexne združený) sa bude nazývať Hermitovsky združený k x (značíme x^H alebo x^*).

• podobne niečo sa dá spraviť aj pre matice, a tak ako sme mali $(AB)^T = B^T A^T$ dostaneme aj $(AB)^H = B^H A^H$.

• dva vektory x, y v $\mathbb{C}^n$ budú ortogonálne, ak $\overline{x}^T y = 0$

• dĺžka vektora x je $\|x\| = (x^H x)^{1/2} = \sqrt{\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \dots + \overline{x}_n x_n}$

Symetrické matice, Hermitovské matice

• Ukážeme si, že symetrické matice majú všetky vlastné hodnoty reálne a dajú sa k nim nájsť ortonormálne vlastné vektory.

• V skutočnosti dokážeme silnejšie tvrdenie pre tzv. Hermitovské matice.

• symetrické matice spĺňajú $A^T = A$

• obdobne – Hermitovské matice spĺňajú $A^H = A$ $(\overline{A}^T = A)$

každá (reálna) symetrická matica je aj hermitovská (premyslieť si

6.5

Vlastnosť 1   Ak $A = A^H$, potom pre všetky (komplexné) vektory $x \in \mathbb{C}^n$ platí $x^H A x \in \mathbb{R}$.

Dôkaz $c = x^H A x$ je matica typu 1×1, teda číslo. Čo dostaneme ak by sme ho Hermitovsky združili?

$$\bar{c} = c^H = (x^H A x)^H = x^H A^H (x^H)^H = x^H A x = c$$

čiže $\bar{c} = c$, a teda $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Vlastnosť 2   Každá vlastná hodnota hermitovskej matice je reálne číslo.

Dôkaz   Nech λ je vlastná hodnota, k nej prislúchajúci vlastný vektor $Ax = \lambda x$.

Potom $x^H (Ax) = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \|x\|^2$.

Z vlastnosti 1 máme, že ľavá strana je reálne číslo a pravá strana je λ krát kladné reálne číslo $\|x\|^2$.

Preto $\lambda = \dfrac{x^H A x}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$.

Vlastnosť 3   Vlastné vektory reálnej symetrickej matice (alebo Hermitovskej) prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne

Dôkaz   **Nech** $A x_1 = \lambda x_1$ a $A y_2 = \lambda y_2$ a $A^H = A$.

Potom: $\bar{\lambda}_1 \langle x, y \rangle = \bar{\lambda}_1 x^H y = (\lambda_1 x)^H y = (Ax)^H y = x^H A^H y =$

$$= x^H A y = x^H (\lambda_2 y) = \lambda_2 x^H y = \lambda_2 \langle x, y \rangle.$$

keďže λ_1 a λ_2 sú reálne čísla (vlastnosť 2), z predpokladu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ máme $\langle x, y \rangle = x^H y = 0$

$(\lambda_1 \langle x, y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle \quad \lambda_1 \neq \lambda_2)$.

Pozn. Vlastné vektory môžeme "naťahovať" a "skracovať", t.j. aj násobok vlastného vektora zostane vlastným vektorom. Preto sa dajú brať jednotkovej dĺžky: x nahradiť $\frac{x}{\|x\|}$.

Ak ~~je~~ má symetrická matica rôzne vlastné hodnoty, potom je diagonalizovateľná (to sme ukázali ~~z~~ dávnejšie), máme rozklad:

$$S^{-1} A S = \Lambda$$

Navyše ale vieme, že Λ má reálne zložky (vl. 2) a S sa dá vybrať tak, že (podľa 3) jej stĺpce majú jednotkovú dĺžku a sú navzájom kolmé, teda S je ortogonálna a platí $S^{-1} = S^T$, $SS^T = S^TS = I$.

Tvrdenie (Veta o hlavných osiach, Spektrálna veta)
Ak A je reálna symetrická matica ($A^T = A$) potom existuje diagonalizačná matica Q taká, že Q je ortogonálna matica.
Teda existuje rozklad:

$$\boxed{A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T}$$

Stĺpce Q sú vlastné vektory matice A, diagonálna Λ obsahuje reálne vl. hodnoty na diagonále.

~~Pozn~~ sem 24.3.2015

kej) Pozn Dôkaz tejto vety ešte stále nemáme – na to budeme
ne. potrebovať ďalšiu (netriviálnu) teóriu.
Prípad, ktorý by mohol spôsobovať problémy, predstavujú viacnásobné vlastné hodnoty. Ak geom. nás. (λ) = alg. nás. (λ), tak vlastné vektory pre túto vl. hodnotu vieme vybrať tak, aby boli ortogonálne (Gram-Schmidt).

Sem. 21.3.1

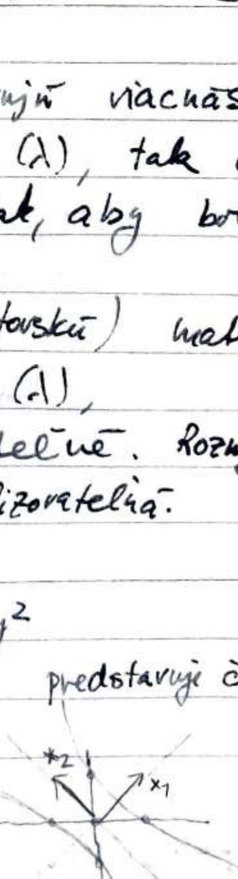
Potrebujeme ukázať, že pre symetrickú (hermitovskú) maticu bude vždy platiť geom. nás. (λ) = alg. nás. (λ), resp. že takéto matice sú diagonalizovateľné. Rozmyslieť si, kedy je matica s viacnásobnými vl. hodnotami diagonalizovateľná.

Príklad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + y^2$

rovnica $(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ predstavuje čo? ~~Elipsa~~ Hyperbola

VI

Potom: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, vl. vektory $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$



$$1 = \frac{3}{2}(x+y)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-y)^2$$

obr.

7.2

Pozn. Kužeľosečky, resp. kvadratické formy ~~sa~~ ~~dostaneme~~ budú súvisieť s rovnicou: $x^TAx = c$, pomocou symetrickej matice A a vektor x

je to tu vhodné? (?)

z rozkladu $A = Q\Lambda Q^T$ dostaneme

$$x^TAx = x^TQ\Lambda Q^Tx = (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx) = c$$

nové súradnice (stĺpce matice Q), teda dávajú hlavné osi kužeľosečky.

z tohto dôvodu sa zvykne táto veta nazývať veta o hlavných osiach

Pozn. Ale $A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — x_1^T — \\ — x_2^T — \\ \vdots \\ — x_n^T — \end{bmatrix} =$

$$= \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T + \dots + \lambda_n x_n x_n^T$$

- teda A sa dá napísať ako súčet n matíc hodnosti 1.
- Množina $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sa nazýva spektrum matice A, každá z matíc $x_i x_i^T$ predstavuje projekciu na priestor generovaný x_i.

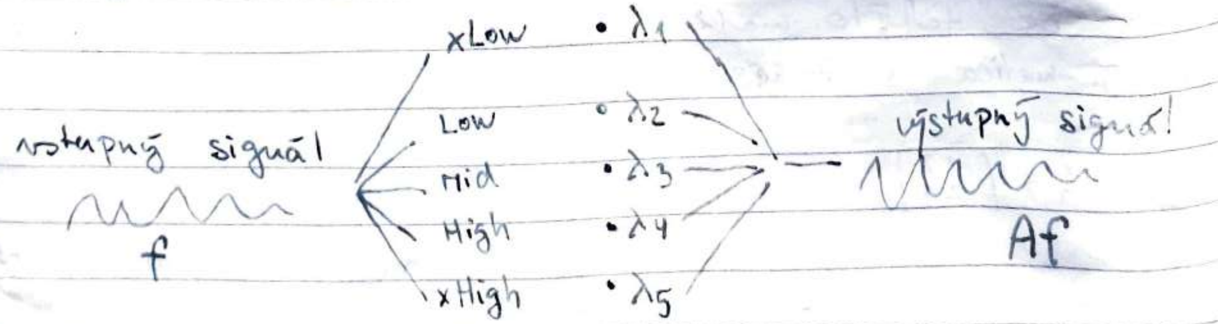
Čo spraví matica A so ~~signálom~~ vektorom y?

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$Ay = A(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 + \dots + c_n\lambda_n x_n$$

Koeficienty c_i dostaneme projekciou, a potom matica A každú zložku x_i "zosilní" práve "λ_i" krát.

Príklad Analógia so zosilovačom:



- z tohto dôvodu sa zvykne nazývať veta o rozklade $A = Q\Lambda Q^T$ aj spektrálna veta.

Poznáme odpoveď (aj keď ju zatiaľ nevieme dokázať) pre symetrické matice.

- Ako to bude pre iné (reálne) matice?
  - môžu byť vl. hodnoty reálne? Môžu...
  - budú vlastné vektory ortogonálne? Nie.

  Rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ vedie k:
  $$A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = Q\Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A.$$
  čiže ak sú vl. vektory ortogonálne, vl. hodnoty reálne, matica už musí byť symetrická.
- Ako je to s komplexnými vlastnými hodnotami reálnych matíc?

Tvrdenie Ak $\lambda = a+ib$ je koreňom polynómu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s reálnymi koeficientami, potom aj $\bar{\lambda} = a - ib$ je koreňom.

Sem 25.3.19 VI

Dôkaz Predpokladajme $p(\lambda) = 0$, ~~tzn.~~ potom:

$$0 = \bar{0} = \overline{p(\lambda)} = \overline{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0} = \bar{a}_n(\bar{\lambda})^n + \bar{a}_{n-1}(\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 =$$

$$= a_n(\bar{\lambda})^n + a_{n-1}(\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1(\bar{\lambda}) + a_0 = p(\bar{\lambda}).$$
(lebo $a_i \in \mathbb{R}$)

Teda aj $\bar{\lambda}$ je koreňom. ■

Dôsledok Ak $\lambda = a+ib$ je vlastnou hodnotou reálnej matice A, potom aj $\bar{\lambda} = a - ib$ je vlastnou hodnotou reálnej matice A. Inými slovami – komplexné vlastné hodnoty "chodia v pároch".

Dôkaz $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je pre reálnu $n \times n$ maticu A polynóm stupňa n s reálnymi koeficientami. Ak je $\lambda_0 = a+ib$ vlastnou hodnotou, $\chi_A(\lambda_0) = 0$, tak aj $\bar{\lambda}_0 = a - ib$ je vlastnou hodnotou podľa predošlého tvrdenia. ■

7.4

Unitárne matice

Vrátiac sa naspäť k vlastným hodnotám a vektorom Hermitovskej matice. - spektrum je reálne, vlastné vektory možno brať tak, že sú ortonormálne (ale vzhľadom na hermitovský skalárny súčin).

V reálnom prípade: matice s ortonormálnymi stĺpcami $\langle x, y \rangle$
splňajú $Q^T Q = I = Q Q^T$
- ortogonálne matice

V komplexnom prípade môžeme postupovať analogicky:
skalárnemu súčinu zodpovedá $\langle x, y \rangle = x^H y$
z čoho máme rovnosť:
$$U^H U = I = U U^H$$
(lebo inverzia je vždy ... je dvoj...)

· Takéto komplexné matice sa nazývajú **unitárne**.

Def Matica $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sa nazýva unitárna ak
(definičná vlastnosť) $U^H U = UU^H = I$ resp. $U^{-1} = U^H$

Vlastnosť 2 Násobenie unitárnou maticou U je naozaj komplexná obdoba násobenia ortogonálnou maticou Q (otočenia, preklopenia)
- zachováva skalárny súčin a dĺžky:

· $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = x^H U^H U x = x^H x = \|x\|^2$

· $\langle Ux, Uy \rangle = x^H U^H U y = x^H y = \langle x, y \rangle$

Vlastnosť 3 Každá vlastná hodnota unitárnej matice má absolútnu ~~...~~ hodnotu ~~...~~ 1, t.j. $|\lambda| = 1$.

Dôkaz Nech $Ux = \lambda x$, potom $\|Ux\| = \|x\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.