<u>Vlastnosť 4</u> Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám unitárnej matice U sú navzájom ortogonálne.

<u>Dôkaz</u> Nech $Ux = \lambda_1 x$ a $Uy = \lambda_2 y$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Potom $\langle x, y \rangle = x^H y = x^H U^H U y = \langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda_1 x, \lambda_2 y \rangle$

$$= \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x, y \rangle.$$

Potom platí buď $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 = 1$ alebo $0 = \langle x, y \rangle$. Keďže λ_1, λ_2 sú komplexné čísla veľkosti 1, $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, teda $1 \neq \bar{\lambda}_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Platí teda $\langle x, y \rangle = 0$.

<u>Príklad</u> Reálna ortogonálna matica je zároveň unitárna $\left(Q^H = \bar{Q}^T = Q^T = Q^{-1}\right)$.
Tak skúsme:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vlastné hodnoty budú $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ $(\cos\theta \pm i \sin\theta)$, vlastné vektory $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, ktoré sú Hermitovsky kolmé a po predelení $\sqrt{2}$ dávajú jednotkové vektory. Dostávame rozklad:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}}_{U^H}$$

<u>Antihermitovské matice</u>

Zovšeobecnením antisymetrických matíc (definičná rovnosť $A^T = -A$) sú tzv. <u>anti-Hermitovské</u> matice spĺňajúce

$$K^H = -K$$

<u>Tvrdenie</u> Vlastné hodnoty antihermitovskej matice K sú rýdzo imaginárne (t.j. tvaru $\lambda = ib$), jej vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne (hermitovsky).

<u>Dôkaz</u> Ak je K anti-hermitovská, potom je iK hermitovská,

7.6

lebo: $(iK)^H = \bar{i} K^H = (-i)(-K) = iK.$

Teda matica iK je Hermitovská a vieme o nej:

- má reálne vlastné hodnoty
- jej vlastné vektory sú kolmé.

Ak spektrum $(K) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, potom spektrum $(iK) = \{i\lambda_1, \dots$

tiež existujú ortogonálne vektory:

$$(iK) = (i\lambda_j)\, x_j$$

Lenže potom: $i\lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_j \in i\mathbb{R}$

x_j sú vl. vektory matice (ik), tak sú aj vlastnými vektormi matice K. (teda súkl...

Alebo inak: ak $A = U\Lambda U^H$, potom $K = iA = U(i\Lambda)U^H$.

<u>Otázka</u> Videli sme, že pre Hermitovské matice máme:

$A^H = A$ $\qquad A = U\Lambda U^H \qquad \Lambda$ - reálne $\lambda_i \in \mathbb{R}$

pre Unitárne:

$U^H U = I \qquad U = V\Lambda V^H \qquad \Lambda - |\lambda_i| = 1$

pre antihermitovské

$K^H = -K \qquad K = U\Lambda U^H \qquad \Lambda$ - výlučne imaginárne $\lambda_i \in i\mathbb{R}$

Čo vieme povedať o matici, ktorej diagonalizačná matica je unitárna? t.j. $N = U\Lambda U^H$?

Rozhodne potom musí platiť:

$$N^H N = (U\Lambda U^H)^H (U\Lambda U^H) = (U\Lambda^H U^H)(U\Lambda U^H) =$$

$$= U\bar{\Lambda}\Lambda U^H = U\Lambda\bar{\Lambda} U^H = (U\Lambda U^H)(U\bar{\Lambda}U^H) =$$

$$= (U\Lambda U^H)(U\Lambda^H U^H) = NN^H.$$

<u>Definícia</u> Hovoríme, že komplexná matica N je <u>normálna</u>, ak spĺňa

$$N^H N = NN^H.$$

<u>Pozn</u> Hermitovské, unitárne aj anti-hermitovské sú normálne

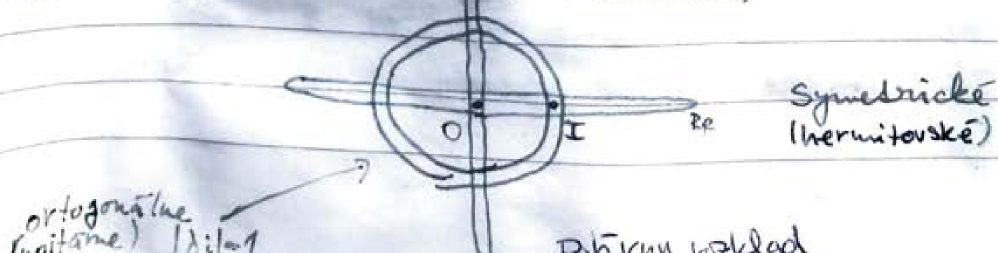
Prieskumný výlet do sveta komplexných VP a matíc prevzime ohľadom späť, porovnanie 7.7

Porovnanie komplexného a reálneho

Reálne	Komplexné
$\mathbb{R}^n$ = priestor ~~[illegible]~~ vektorov s n reálnymi zložkami	$\mathbb{C}^n$ = priestor vektorov s n komplexnými zložkami.
dĺžka $\\|x\\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$\\|x\\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$
transpozícia: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$	Hermitovské združenie $(A^H)_{ij} = \bar{A}_{ji}$
$(AB)^T = B^T A^T$	$(AB)^H = B^H A^H$
skalárny súčin: $x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$	hermitovský skalárny súčin: $x^H y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \dots + \bar{x}_n y_n$
$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle$	$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^H y = x^H A^H y = \langle x, A^H y \rangle$
kolmosť $x^T y = 0$	kolmosť $x^H y = 0$
symetrické matice $A^T = A$ $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$ (reálne Λ)	Hermitovské matice $A^H = A$ $A = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^H$ (reálne Λ)
antisymetrické matice $K^T = -K$	antihermitovské matice $K^H = -K$
ortogonálne matice $Q^T Q = I$ alebo $Q^T = Q^{-1}$	unitárne matice $U^H U = I$ alebo $U^H = U^{-1}$
$\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^T (Qy) = x^T y = \langle x, y \rangle$	$\langle Ux, Uy \rangle = (Ux)^H (Uy) = x^H y = \langle x, y \rangle$
$\\|Qx\\| = \\|x\\|$	$\\|Ux\\| = \\|x\\|$

Q, U (ortogonálne, unitárne) majú $|\lambda| = 1$ a vl. vektory ortonormálne.

Obrázok



Polárny rozklad

Ak by sme sa pozreli na matice, ako na nejaké zovšeobecnené čísla ...

$\Lambda \in \mathbb{R}$

Potom môžeme schematicky predošlé výsledky zakresliť pomocou obrázku

Sem 5.4.16 XII

8.1.

Podobnosť matíc, zmena bázy

Už dlhší čas sa zaoberáme nasledovným:
pre maticu A nájsť maticu S (vlastné vektory), aby Λ
(vlastné hodnoty), aby platilo:

$$S\Lambda S^{-1} = A \qquad S^{-1}AS = \Lambda$$

dôvod: zjednodušenie výpočtov.

Čo by sa stalo, ak by sme prestali klásť obmedzenia na maticu
S a dovolili, aby to bola ľubovoľná invertibilná matica?
Bude to mať nejaký geometrický význam?

Def. Matice A a $B = M^{-1}AM$ pre regulárnu maticu M
sa nazývajú **podobné**.

Pozn. Ak matica M spĺňa ďalšie podmienky (ortogonálna, unitárna)
môžeme hovoriť:
Matice A a $B = M^{-1}AM$ sú ortogonálne podobné (M-or
unitárne podobné (M-u

Otázky: 1) Čo majú podobné matice spoločné?
2) Aký je geometrický význam podobnosti?
3) Ako vyzerá „najjednoduchšia" matica, ktorá je podobná /
unitárne podob...

Odpoveď na 3: - pre diagonalizovateľné je to
diagonálna Λ
- pre nediagonalizovateľné
to bude J - Jordanov kanonický
tvar
- pre unitárnu podobnosť
bude odpoveďou Schurov ...

Najprv však k otázke č. 1.

<u>Tvrdenie</u> Ak A a B sú podobné matice, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom A a B majú rovnaké vlastné hodnoty. Navyše x je vlastný vektor matice A práve vtedy, keď $M^{-1}x$ je vlastný vektor matice B.

<u>Dôkaz</u> 1) Ukážeme silnejšie tvrdenie, a to, že matice A a B majú rovnaký charakteristický polynóm.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det M^{-1} \det(A-\lambda I) \det(M) =$$

$$= \det(M^{-1}(A-\lambda I)M) = \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}IM) =$$

$$= \det(B-\lambda I) = \chi_B(\lambda)$$

Keďže A, B majú rovnaké char. polynómy, majú rovnaké aj vlastné hodnoty spolu s algebraickými násobnosťami.

$\boxed{1.4.19 \ \mathrm{VII}}$

2) Nech $Ax = \lambda x$. Potom $A = MBM^{-1}$, teda

$$MBM^{-1}x = \lambda x \qquad / \cdot M^{-1}$$

$$B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x)$$

Čiže λ je vlastná hodnota B a pre nenulový vektor x dostávame (vďaka regularite M) aj nenulovosť vl. vektora $M^{-1}x$.
Zároveň dostávame aj rovnosť geometrických násobností.

<u>Príklad</u> Matica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je diagonálna, jej vl. hodnoty sú 1 a 0.

- ak $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, potom $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ak $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ a $B = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(projekčná matica na priamku $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

<u>Pozn</u> Ak by sme chceli nájsť všetky matice, ktoré majú vlastné hodnoty $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (navzájom rôzne), vieme, že každá z nich je podobná diagonálnej $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, teda stačí zobrať všetky matice tvaru

$$B = M \Lambda M^{-1} \qquad \text{(pre } M \text{ regulárnu maticu)}$$

8.3.:

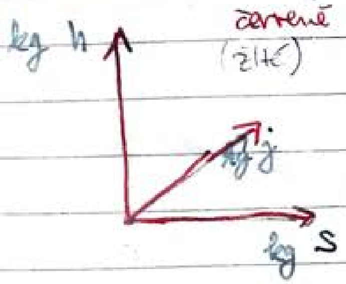
K otázke č.2

geometrický význam - zmena bázy, zmena súradníc

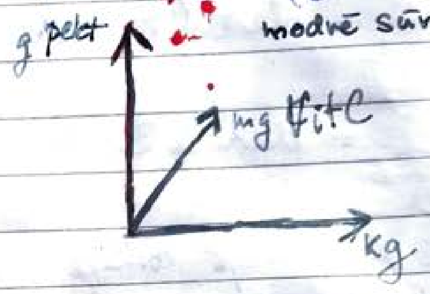
poddonosti,

Táto ~~ot~~ vec je komplikovaná a spôsobuje problémy pri pochopení, zároveň je kľúčová a dôležitá - treba nad ňou stráviť čas, pochopiť sa.

Pr Asi si spomínate na príklad o varení lekváru - mali sme slivky, jablká a hrušky, ktoré mali váhu (kg), obsah (mg) vitamínu C a obsah (g) pektínu. Mohli v kolli sme mohli popísať pomocou súradnicovej sústavy:



alebo



Prechod medzi súradnicami zabezpečovala regulárna matica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 60 & 40 \\ 15 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

potom $M \begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 60 & 40 \\ 15 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1s + 1j + 1h \\ 100s + 60j + 40h \\ 15s + 5j + 7h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HM \\ vitC \\ pekt \end{pmatrix}$

podobne by sme mali $M^{-1} \begin{pmatrix} HM \\ vitC \\ pekt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ j \\ h \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ≐ 1kg slivák → $\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 15 \end{pmatrix}$
hodnota červ. vektora v modr. súradniciach

Tu si treba všimnúť, že súradnice sa nám lineárne, ~~zmena~~ je pomocou - zdajú sa skreslené

Vo všeobecnosti, napr. pri riešení diferenčných alebo diferenciálnych rovníc, tiež môžeme ľubovoľne meniť súradnicové sústavy - tak aby nám to čo najviac vyhovovalo.
A pri riešení rovníc hrali úlohu vlastné vektory.

Tak to podme písať: $B = M^{-1}AM$, $BM^{-1} = M^{-1}A$, $MBM^{-1} = A$
$MB = AM$

(modrá rovnica)

- $Ax = \lambda x$ $M^{-1}Ax = BM^{-1}x = \lambda M^{-1}x$ ak označíme: $y = M^{-1}x$
$My = x$

tak dostaneme $By = \lambda y$ (červená rovnica)

modrá - ~~zelená~~ žltá x
červená - červená y
čierna - modrá M
pomocná - biela vlastné

Čo to znamená v reči rovníc?

Majme modré rovnice (stará súradnicová sústava x) s neznámou u, chceme nájsť nové rovnice (nová súradnicová sústava y) danú predpisom $u = Mv$

Modré (pôvodné) rovnice

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad \frac{du}{dt} = \frac{dMv}{dt} = M\frac{dv}{dt} = Au = AMv$$

$$\frac{dv}{dt} = M^{-1}AMv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = Bv$$

$$u_{k+1} = Au_k$$

$$Mv_{k+1} = AMv_k \Longrightarrow v_{k+1} = M^{-1}AMv_k \Longrightarrow v_{k+1} = Bv_k$$

sem 26.3.13

Prechodom od u k v (vzťah $u = Mv$) meníme maticu riadiacu rovnicu z A na $M^{-1}AM = B$

Ako sme už povedali, prechod od $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ (stará báza) (modré súradnice)

k $u = Mv = M\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ zodpovedá zmene súradníc, t.j. zmene bázy.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + u_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + u_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = u_1e_1 + u_2e_2 + \dots + u_ne_n$$

$$\parallel$$

druhý M^{-1}

$$Mv = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} | \\ m_1 \\ | \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} | \\ m_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + v_n\begin{bmatrix} | \\ m_n \\ | \end{bmatrix} = v_1 m_1 + v_2 m_2 + \dots + v_n m_n$$

sem kdesi 14.4.2015

Rovnica $u = Mv$ je ekvivalentná $M^{-1}u = v$.

Teda prechod súradníc v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) k súradniciam u (báza $e_1, e_2, \dots, e_n$) je daný násobením maticou M, $u = Mv$.

Prechod od súradníc u (báza $e_1, e_2, \dots e_n$) k súradniciam v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) je daný násobením maticou M^{-1}

$$v = M^{-1}u.$$

8.6/9.1

matice prechodu: $M = \left[\ldots\right] = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $\quad M^{-1} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ (ortog.)

A naozaj

$$A = M\,B\,M^{-1} = \overset{M}{\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{M^{-1}}{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}} = \overset{H}{\begin{bmatrix} c^2-s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2-c^2 \end{bmatrix}} =$$

$$\left(= 2\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$(2P \quad - \quad I)$$

sem 4412

(ešte doplniť diagram)

~~Trojuholníková forma matice pomocou unitárnej podobnosti~~
~~(Schurova lemma)~~

doplniť obrázok v novej súradnicovej sústave

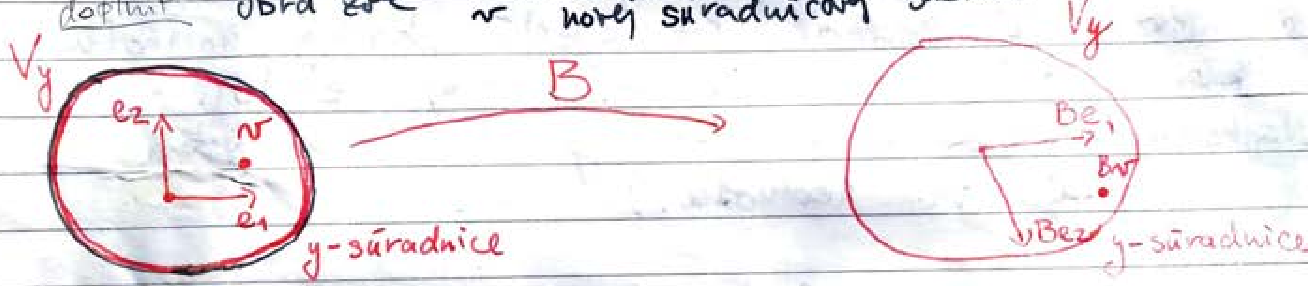


diagram:

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "M^{-1}"'] & V_x \arrow[d, shift right, "M^{-1}"'] \\ V_y \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "M"'] & V_y \arrow[u, shift right, "M"'] \end{tikzcd}$$

lebo: $A = M\,B\,M^{-1}$
tretie druhé prvé

podobne: $B = M^{-1} A M$

som 8.4.2014
som 12.4.2016 bez príkladu

pol tamto príklad.

Trojuholníková forma pomocou unitárnej podobnosti
(Schurova lemma)

Videli sme, že niektoré matice (symetrické, hermitovské, ortogonálne, unitárne antisym., antiherm.) sú podobné diagonálnym, keď za maticu podobnosti zoberieme ortogonálnu (resp. unitárnu) maticu.

Takže sa môžeme pýtať: ako ďaleko od diagonalizovania