Čo to znamená v reči rovníc?

Majme modré rovnice (stará súradnicová sústava x) s neznámou u,
chceme nájsť nové rovnice (nová súradnicová sústava y) dané predpisom $u = Mv$

Modré (pôvodné) rovnice

$\frac{du}{dt} = Au$ $\qquad \frac{du}{dt} = \frac{dMv}{dt} = M\frac{dv}{dt} = Au = AMv$

$$\Downarrow$$

$u_{k+1} = Au_k$ $\qquad \frac{dv}{dt} = M^{-1}AMv \rightarrow \frac{dv}{dt} = Bv$

$$Mv_{k+1} = AMv_k \Rightarrow v_{k+1} = M^{-1}AMv_k \Rightarrow v_{k+1} = Bv_k$$

sem 26.3.13

Prechodom od u k v (vzťah $u = Mv$) meníme maticu riadiacu rovnicu z A na $M^{-1}AM = B$

Ako sme už povedali, prechod od $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$ (stará báza) (modré súradnice)

k $u = Mv = M\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_n \end{bmatrix}$ zodpovedá zmene súradníc, t.j. zmene bázy.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + u_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + u_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = u_1e_1 + u_2e_2 + \dots + u_ne_n$$

$$\parallel$$

druhý M^{-1}

$$Mv = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} | \\ m_1 \\ | \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} | \\ m_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + v_n\begin{bmatrix} | \\ m_n \\ | \end{bmatrix} = v_1 m_1 + v_2 m_2 + \dots + v_n m_n$$

sem ktosi 14.4.2015

Rovnica $u = Mv$ je ekvivalentná $M^{-1}u = v$.

Teda prechod súradníc v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) k súradniciam u (báza $e_1, e_2, \dots, e_n$) je daný násobením maticou M, $u = Mv$.
Prechod od súradníc u (báza $e_1, e_2, \dots e_n$) k súradniciam v (báza $m_1, m_2, \dots, m_n$) je daný násobením maticou M^{-1}

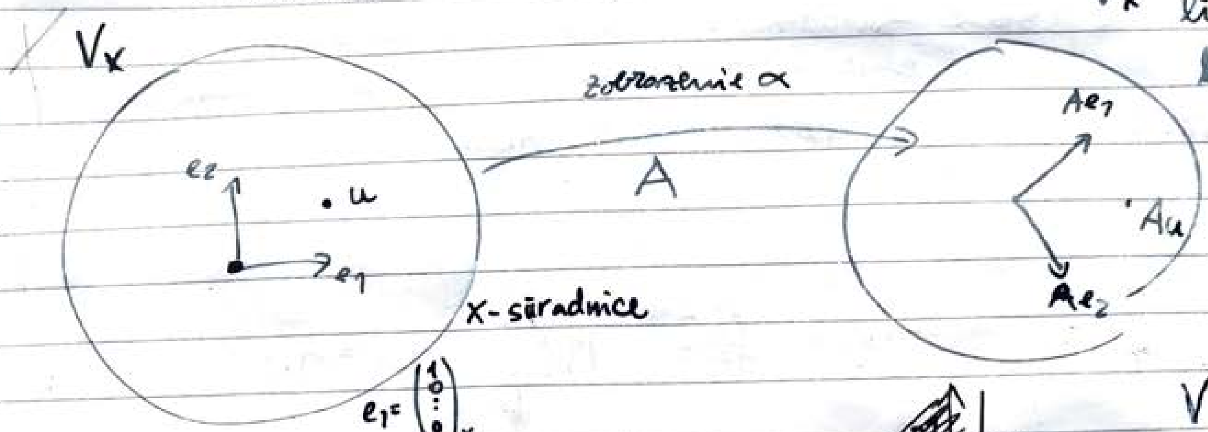
$$v = M^{-1}u.$$

(Rozmyslieť)

8.5

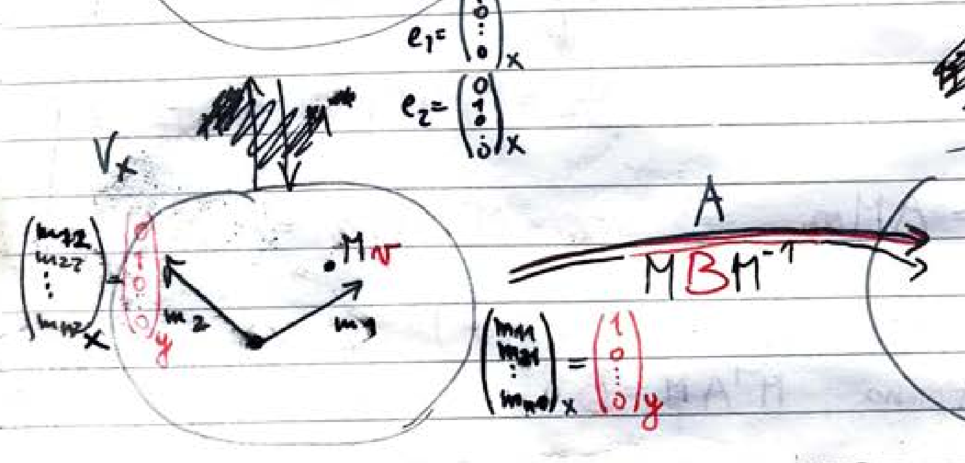
Obrázok – súvis s podobnosťou.

Matica A reprezentuje lineárnu transformáciu ktorá posiela $u \mapsto A$ (špeciálne $e_i \mapsto Ae_i$)



$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_x \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}_x$

V kojých súradniciach nie je až také jasné kam sa majú zobraziť



$Am_1 = MB\underbrace{M^{-1}m_1}_{e_1}$ nové bázové vektory m_i

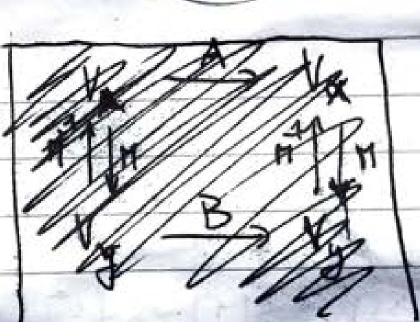
$AMv = MBv$

$Am_2 = MB\underbrace{M^{-1}m_2}_{e_2}$

$u \longmapsto Au$

$\overset{\shortparallel}{Mv} \qquad \overset{\shortparallel}{AMv}$

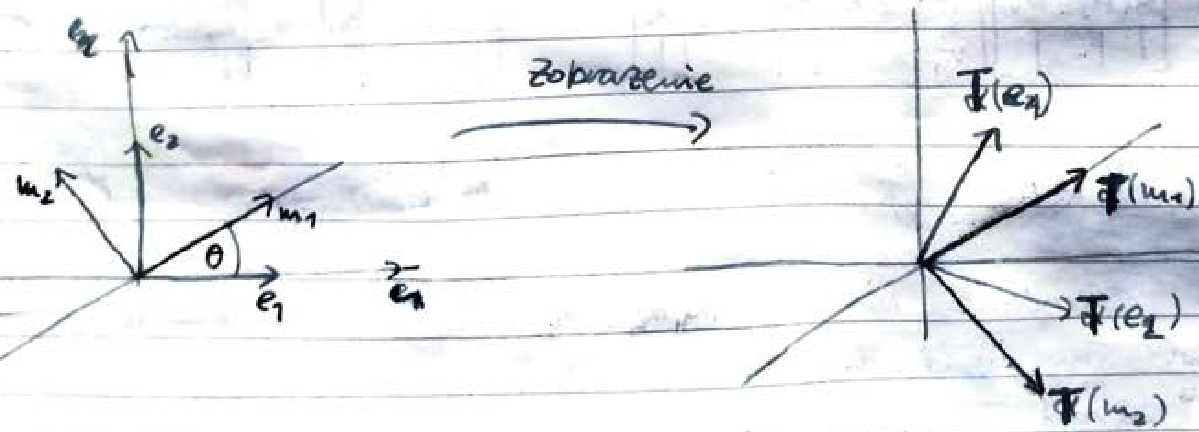
$v \longmapsto M^{-1}AMv = Bv$



Bazmeg

Sem 11.4.17 + Zopakovať

Príklad Osová súmernosť podľa priamky zvierajúcej uhol θ s x-ovou osou.



Standardná báza: $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Špeciálna báza $m_1 = \begin{bmatrix}C\\S\end{bmatrix}, m_2 = \begin{bmatrix}-S\\C\end{bmatrix}$

Matica pre $B = \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ lebo $T(m_1) = m_1 = 1\cdot m_1 + 0\,m_2$
$T(m_2) = -m_2 = 0\, m_1 + (-1)m_2$

matice prechodu: $M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $\quad M^{-1} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ (ortog.)

A naozaj

$$\begin{array}{ccccc} & M & & M^{-1} & H \\ A = MBM^{-1} = & \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} c^2-s^2 & 2cs \\ 2cs & s^2-c^2 \end{bmatrix} = \end{array}$$

$$\left(= 2\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$(2P \quad - \quad I)$$

sem 4412

(ešte doplniť diagram)

~~Trojuholníková forma pomocou unitárnej podobnosti~~
~~(Schurova lemma)~~

doplniť obrázok v novej súradnicovej sústave

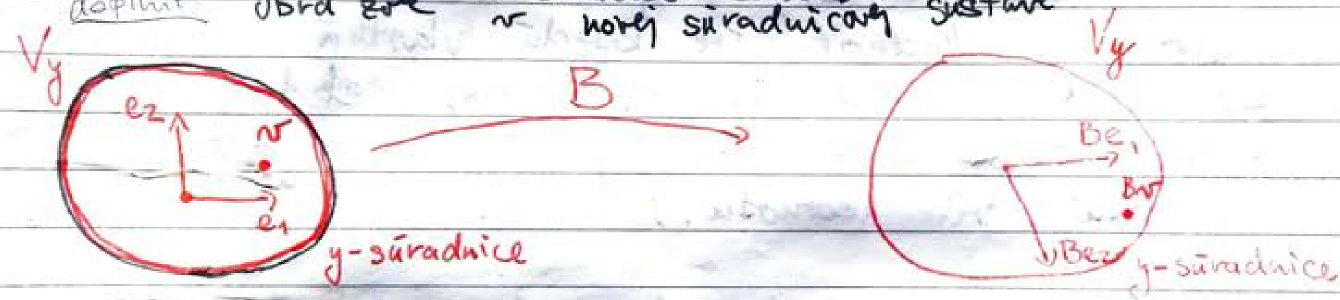


diagram:

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "M^{-1}"'] & V_x \arrow[d, shift right, "M^{-1}"'] \\ V_y \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "M"'] & V_y \arrow[u, shift right, "M"'] \end{tikzcd}$$

lebo: $A = \underset{\text{tretie}}{M}\,\underset{\text{druhé}}{B}\,\underset{\text{prvé}}{M^{-1}}$

podobne: $B = M^{-1} A M$

sem 8.4.2014

sem 12.4.2016 bez príkladu

pol tento príklad.

Trojuholníková forma pomocou unitárnej podobnosti
(Schurova lemma)

Videli sme, že niektoré matice (symetrické, hermitovské, ortogonálne, unitárne antisym., antiherm.) sú podobné diagonálnym, keď za maticu podobnosti zoberieme ortogonálnu (resp. unitárnu) maticu.

Takže sa môžeme pýtať: ako ďaleko od diagonalizovania

9.2.

~~[illegible]~~ je daná matica, ak používame kolmé (a ~~jednot~~ normované) vektory ?

Odpoveďou je nasledujúce tvrdenie, ktoré sa volá Schurova Lema.

Tvrdenie (Schurova Lema). Pre ľubovoľnú štvorcovú maticu A existuje unitárna matica U taká, že $U^{-1}AU = T$ je horná trojuholníková. Vlastné hodnoty A sú rovnaké ako vl. hodnoty matice T, t.j. jej diagonálne zložky.

Dôkaz Matica A má charakteristický polynóm ~~χ~~ $(\lambda) =$ $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, ktorý má n komplexných koreňov, vl. hodnôt. Pre každú vlastnú hodnotu, pokiaľ sú rôzne, ~~existuje~~ musí existovať vlastný vektor. (Najhoršie, čo sa môže stať, je ak máme jednu n-násobnú vl. hodnotu.)

Nech teda λ_1 je vl. hodnota matice A, jej zodpovedá nejaký vlastný vektor x (v zásade z $\mathbb{C}^n$), ktorý môžeme normalizovať na jednotkovú dĺžku

$$x_1 = \frac{x}{\|x\|}.$$

Potom $$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad , \quad \|x_1\| = 1.$$

Vektor x_1 môžeme doplniť pomocou Gram-Schmidtovej ortogonalizácie na nejakú ortonormálnu bázu $\mathbb{C}^n$ (pokiaľ $x_1 \in \mathbb{R}^n$, tak sa to dá spraviť s vektormi v $\mathbb{R}$

Takto dostaneme unitárnu maticu U_1. Platí:

$$AU_1 = A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & * & \cdots & * \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & * & \cdots & * \\ | & | & & | \end{bmatrix} = U_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_1 + 0* + \ldots + 0*$$

čo je to isté ako :

9.3.

$$U_1^{-1} A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \leftarrow X$$

sem 8.4.19 VIII

V druhom kroku pracujeme s $(n-1)\times(n-1)$ maticou, X_2 ktorú dostaneme v pravom dolnom rohu. Treba si uvedomiť, že matica A a matica napravo sú podobné, teda majú rovnaké vlastné hodnoty. Prvá - λ_1 - je na diagonále, preto $(n-1)\times(n-1)$ podmatica X_2 bude mať ako vlastné hodnoty zvyšných $(n-1)$ vlastných hodnôt matice A.

Môžeme teda pre ňu nájsť vlastný vektor z $\mathbb{C}^{n-1}$, ten doplniť na ortonormálnu bázu, ktorú môžeme zapísať pomocou matice M_2. Doplnením na ortonormálnu bázu $\mathbb{C}^n$ dostaneme maticu U_2:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0\,0\cdots0 \\ 0 & \\ \vdots & M_2 \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad U_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0\cdots0 \\ 0 & \\ \vdots & M_2^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Takto dostaneme

$$U_2^{-1}\left(U_1^{-1} A U_1\right) U_2 \overset{\text{(prečo?)}}{=} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & M_2^{-1} X_2 M_2 \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \leftarrow X_3$$

pričom M_2 sme vybrali tak, aby sme v prvom stĺpci $M_2^{-1}X_2M_2$ dostali $\begin{pmatrix}\lambda_2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$. Takýmto spôsobom môžeme induktívne pokračovať, nájsť ~~maticu~~ unitárnu maticu U_3 tvaru:

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots0 \\ 0 & 1 & 0\cdots0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & M_3 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \text{kde} \quad M_3^{-1} X_3 M_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

a

$$U_3^{-1}\left(U_2^{-1}\left(U_1^{-1} A U_1\right) U_2\right) U_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \leftarrow X_4.$$

9.4.

Po $(n-1)$ opakovaniach dostaneme

$$U_{n-1}^{-1} U_{n-2}^{-1} \dots U_2^{-1} U_1^{-1} A U_1 U_2 \dots U_{n-2} U_{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & & * & * \\ & \lambda_2 & * & & * & * \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \lambda_{n-1} & * \\ & & 0 & & & \boxed{*} \end{bmatrix} = T$$

$\leftarrow X_n$

Lenže matica X_n už je v hornom trojuholníkovom tvare a zjavne musí byť rovná λ_n (kvôli podobnosti)

Nakoľko súčin unitárnych matíc je unitárna matica, tak ~~...~~ označiac $U = U_1 U_2 \dots U_{n-1}$ dostávame $U^{-1} A U = T$.

<u>Príklad</u> Nech $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Matica A má dvojnásobnú vlastnú hodnotu $\lambda = 1$.

- $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$
- vlastný vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, po znormovaní $x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Na ortonormálnu bázu sa dá doplniť $x_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Takto dostaneme

$$U^* A U = U^{-1} A U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Poznámka</u>
- Pre väčšie matice by bol výpočet komplikovan[ý] lebo v každom kroku by bolo potrebné hľadať matice $U_1, U_2, U_3, \dots$
- Ak po celý čas vychádzajú vlastné hodnoty reálne, t[ak] každý z vypočítaných vl. vektorov ~~...~~ $x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}$[...] je reálny $\rightarrow$ matice $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ sú všetky ortogonálne, ~~...~~ v hornej trojuholníkovej mati[ci] T vychádzajú iba reálne koeficienty $\Rightarrow$ máme ortogon[álnu] podobnosť s (reálnou) hornou trojuholníkovou matic[ou]

9.5.

Našu otázku – akej matici je (unitárne) podobná zadaná matica A môžeme rozvíjať ďalej a pýtať sa:

Q: „ Kedy je trojuholníková matica zo Schurovho rozkladu diagonálna."

(Herm, antiherm, Unit, Normálne)

Akosi očakávame, že pre niektoré matice by sme mohli zo Schurovej Lemy vyťažiť viac.

Tvrdenie Ak je matica A hermitovská (unitárna, antihermitovská, normálne), potom je aj $U^{-1}AU$ hermitovská (unitárna, antiherm.) pre unitárnu maticu U.

Dôkaz Hermitovske) $A^H = A$,

$$(U^{-1}AU)^H = U^H A^H (U^{-1})^H = U^{-1} A^H U = U^{-1} A U \checkmark$$

Unitárna) $A^H A = I$

$$(U^{-1}AU)^H (U^{-1}AU) = (U^{-1}A^H \underbrace{U)(U^{-1}}_{} AU) = U^{-1}A^H A U = I \checkmark$$

Antihermitovská) $A^H = -A$

$$(U^{-1}AU)^H = U^{-1} A^H U = U^{-1}(-A)U = -U^{-1}AU \checkmark$$

Normálne)

Tvrdenie Ak je trojuholníková matica hermitovská (antiherm), potom je diagonálna.

Dôkaz Pre hermitovskú maticu platí (po zložkách) $a_{ij} = \bar{a}_{ji} \quad \forall i,j$.

pre antihermitovskú $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$

Lenže pod hlavnou diagonálou sú nuly, t.j. $a_{ij} = 0$ ak $i > j$.

Z toho máme aj $a_{ji} = 0$, resp. $a_{ij} = 0$ ak $i \neq j$.

Pre diagonálne máme navyše: herm) $a_{ii} = \bar{a}_{ii} \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$

antiherm) $a_{ii} = -\bar{a}_{ii} \Rightarrow \lambda_i \in i\mathbb{R}$

sem 9.4.2013

Poznámka Na tomto mieste sme konečne dokončili dôkaz spektrálnej vety. Reálna symetrická matica je podľa Schurovej lemy unitárne (ortogonálne) podobná hornej trojuholníkovej, ale tá musí byť diagonálna a reálna.

9.6.

Tvrdenie Ak je horná trojuholníková matica unitárna, potom je diagonálna.

Dôkaz

$$T^H T = T T^H = I, \quad \text{rozpísaním:}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & & & \\ \overline{t_{12}} & \overline{t_{22}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \overline{t_{1n}} & & & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & & & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t_{11}|^2 & & & \\ & |t_{12}|^2+|t_{22}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |t_{1n}|^2+|t_{2n}|^2+\dots+|t_{nn}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

a tiež

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & & & \\ \overline{t_{12}} & \overline{t_{22}} & & \\ \vdots & & & \\ \overline{t_{1n}} & \dots & & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t_{11}|^2+|t_{12}|^2+\dots+|t_{1n}|^2 & & & \\ & |t_{22}|^2+|t_{23}|^2+\dots+|t_{2n}|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |t_{nn}|^2 \end{pmatrix} = I$$

Porovnaním členov vieme, že $|t_{11}|^2=1$, $|t_{nn}|^2=1$. Lenže potom nutne $t_{1n}=t_{2n}=\dots=t_{(n-1)n}=0$ a tiež $t_{12}=t_{13}=\dots=t_{1n}=0$, t.j. v prvom riadku a poslednom stĺpci sú mimo diagonály nuly. Takto môžeme indukciou postupovať a dostať nuly všade mimo diagonály. Navyše, na diagonále máme $|t_{ii}|=$

21.4.2017

Príklad Matica $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - je to matica permutácie, symetrická, ortogonálna

- teda má vl. hodnoty reálne, s absolútnou hodnotou 1. tiež vieme, že je ortogonálne diagonalizovateľná.

Súčet vl. hodnôt je rovný stope, preto je jediná možnosť je: $\lambda_1=\lambda_2=1$ a $\lambda_3=-1$

Naozaj, dajú sa nájsť ortonormálne vlastné vektory

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad x_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$