9.7.

Potom $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^{T} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1^T- \\ -x_2^T- \\ -x_3^T- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \lambda_3 x_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1^T- \\ -x_2^T- \\ -x_3^T- \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T + \lambda_3 x_3 x_3^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i x_i^T.$$

To môžeme rozpísať aj ako:

$$A = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nakoľko $\lambda_1 = \lambda_2$ (a vektory x_1, x_2 nie sú jednoznačné), tak môžeme $x_1x_1^T$ a $x_2x_2^T$ zlúčiť a dostať:

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_3 P_3 = (+1)\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice P_1 a P_3 sú projekčné matice, ich hodnosti zodpovedajú dimenzii príslušného vlastného priestoru, t.j. $rk\ P_1 = 2$ a $rk\ P_2 = 1$, navyše $P_1 + P_3 = I$, lebo matice pochádzali z ortonormálnej bázy x_1, x_2, x_3. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T = I\right)$.

P_1 zobrazuje na $\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)$, P_3 na $\mathcal{N}(A-\lambda_3 I)$.

Ak by sme v $\mathcal{N}(A-\lambda_1 I)$ zobrali iné vektory x_1', x_2' (kolmé, jednotkovej dĺžky) dostali by sme rozdielne $x_1'x_1'^T$ a $x_2'x_2'^T$, ale ich súčet P_1 by bol rovnaký.

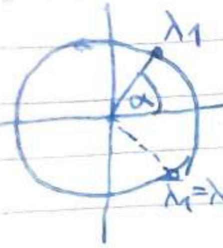
PRESKOČENÉ V 12-TÝŽDŇOVOM (preskočiť nasledujúce?) ak je [illegible] vypri(13)

Príklad. Videli sme, že o ortogonálnej matici A sa dalo veľa povedať iba použitím všeobecnej teórie. Pozrime sa teraz špeciálne na 2x2 a 3x3 matice.

$n=2$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ absolútna hodnoty vlastných hodnôt sú jednotky.

- $tr(A) \in \mathbb{R}$, teda $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Predpokladajme, že $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Potom existuje nejaké α:



$\lambda_1 = \cos\alpha + i \sin\alpha$ (lebo λ_1 ~~platí~~ leží na jednotkovej kr...

Keďže A je ortogonálna (reálne zložky), $\chi_A(\lambda)$ je polynóm s reálnymi koeficientami, a ako sme už ukázali, aj $\bar{\lambda}_1$ musí byť jeho koreňom. Preto $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ a $\det A = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = 1$.

Matice, ktoré majú takéto vlastné hodnoty ~~je~~ sú: $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.
a tie zodpovedajú otočeniu roviny o uhol α.

Ak ~~je~~ $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, tak $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Potom máme v zásade tri možnosti:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a $A = I$ (premyslite si prečo)

$\lambda_1 = -\lambda_2$ a $\operatorname{tr} A = 0$, $\det A = -1$
- ide o maticu osovej symetrie ~~je~~ ktorá vyzerá (zhruba) takto
$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ a $A = -I$.

$n=3$ $\chi_A(\lambda)$ je polynóm stupňa 3 s reálnymi koeficientami. On má vždy aspoň jeden reálny koreň, podobne ako v prípade $n=2$ vieme, že nereálne vl. hodnoty chodia "v páre".

Jediné možnosti potom sú:

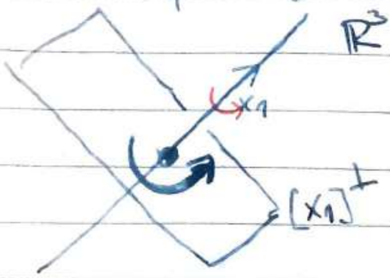
1) $1, \lambda, \bar{\lambda}$ $\lambda \notin \mathbb{R}$
2) $-1, \lambda, \bar{\lambda}$ $\lambda \notin \mathbb{R}$
3) $1, 1, 1$
4) $1, 1, -1$
5) $1, -1, -1$

6) $-1, -1, -1$ det -1 tr -3

Vidíme, že možnosti sa dajú rozlíšiť pomocou determinantu (+1 alebo −1), čo zodpovedá tomu či zobrazenie dané maticou A zachováva alebo obracia orientáciu.

Ak by sme o geometrickom význame uvažovali trochu dlhšie, tak by sme prišli na to, že významným bude vl. vektor zodpovedajúci $\lambda_1 = \pm 1$ (podľa determinantu (znamienka)).

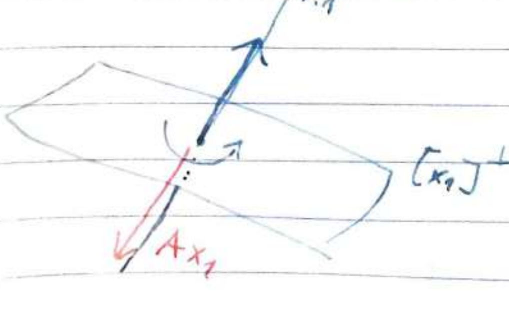
Pre $\lambda_1 = 1$ je totiž x_1 fixovaný. $Ax_1 = 1 \cdot x_1$.



x_2, x_3 zodpovedajú λ_2 a $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, čo sú vektory z $\mathbb{C}^3$, ale v reálnom $\mathbb{R}^3$ sa ich existencia prejaví v $(\text{span}\{x_1\})^\perp$, rovine kolmej na x_1, ktorú A otočí o uhol α. ($\lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$)

→ čiže ide o rotáciu priestoru okolo osi danej x_1 o uhol α (pochádzajúci z λ_2, λ_3).

Pre $\lambda_1 = -1$ dostaneme veľmi podobný obrázok, len vektor x_1 sa "preklopí"! $Ax_1 = (-1)x_1 = -x_1$, v rovine $[x_1]^\perp$ opäť uvidíme rotáciu o uhol α. (z $\lambda_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$)



→ čiže ide o nejakú rotovanú rovinnú symetriu preklopiť cez rovinu $[x_1]^\perp$ a otočiť o uhol α. (zodpovedajúci λ_2, λ_3).

Dá sa nahliadnuť, že prípady 3,4,5,6 sú len špeciálne prípady, keď sa rotuje o 0° resp. 180°.

tr
(-1,3)
(-3,+1)
3
1
-1

Koniec príkladu.

SKRÁTENÉ A ...
⇓ K HERMITOVSKÝM & ANTIHERMITOVSKÝM

Normálne matice

Skúsme naše vyšetrovanie dotiahnuť do konca a odpovedať na otázku, ktoré matice sa dajú diagonalizovať pomocou unitárnych matíc. Odpoveď bude – normálne matice.

Def. Matica N sa nazýva normálna, ak pre ňu platí
$$N^H N = N N^H.$$

Pozorovanie: Ortogonálne, unitárne, symetrické, antisymetrické, Hermitovské aj antihermitovské matice sú normálne.

Tvrdenie: Trojuholníková matica $T = U^{-1} N U$ zo Schurovej Lemy je diagonálna práve vtedy, keď je N normálna.

Teda normálne matice sú také, ku ktorým existuje ortonormálna báza zložená z vlastných vektorov.

(sem 22.4.2014) + príklad o dve strany späť

Dôkaz "$\Rightarrow$" Ak $N = U \Lambda U^{-1}$, potom

$$N N^H = (U \Lambda U^{-1})(U \Lambda U^{-1})^H = (U \Lambda U^{-1})(U \Lambda^H U^{-1})$$

$$= \{U \Lambda \Lambda^H U^{-1}\} = U \Lambda^H \Lambda U^{-1} = (U \Lambda^H U^{-1})(\dots$$

$$= N^H N.$$

"$\Leftarrow$" (náznak) 1) Ak je N normálna, potom je normálna aj $T = U^{-1} N U$.

$$T T^H = (U^{-1} N U)(U^{-1} N U)^H = U^{-1} N N^H U = \dots$$
$$= (U^{-1} N^H U)(U^{-1} N U) = T^H T$$

2) Trojuholníková matica, ktorá je normálna musí byť diagonálna. (dokončenie cvičenie)

Týmto sme uzavreli časť venovanú unitárnej podobnosti, niektoré fakty však použijeme neskôr.

Cayleyho - Hamiltonova veta

Nasledujúce tvrdenie nám pomôže pri porozumení problému diagonalizácie, tiež má aplikácie pri numerickom hľadaní vlastných vektorov.

Tvrdenie (Cayley-Hamiltonova veta)

Každá štvorcová matica spĺňa svoju charakteristickú rovnicu t.j. po dosadení matice A do svojho char. polynómu χ_A dostaneme nulovú matica. ($\chi_A(A)=0$).

Dôkaz. 0) Najprv si uvedomme, že ak $Bx=0$ pre $\forall x\in\mathbb{R}^n$, potom nutne $B=0$, t.j. jediná matica, ktorá znuluje všetky vektory je nulová matica.

1) Dokážme C-H vetu pre horné-trojuholníkové matice.

Nech $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \lambda_3 \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ potom charakteristický polynóm pre T sa dá zapísať: $\chi_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$.

Potrebujeme ukázať, že $\chi(T)=(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_n I)$ je nulová matica. Pozrime sa na súčin $\chi(T)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ pre ľubovoľný vektor $x\in\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$)

$$(T-\lambda_n I)x=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_n & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_n & & * \\ & & \ddots\ \lambda_{n-1}-\lambda_n & * \\ & & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_{n-1}'\\ 0\end{pmatrix}=x'$$

Matica $T-\lambda_n I$ má posledný riadok nulový, preto vektor $x'=(T-\lambda_n I)x$ má poslednú zložku nulovú.

Potom:

$$(T-\lambda_{n-1} I)x'=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_n & & & * \\ & \lambda_2-\lambda_n & & * \\ & & \ddots\ 0 & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_{n-1}'\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ \vdots\\ *\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ \vdots\\ x_{n-2}''\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=x''$$

čiže vektor x'' má posledné dve zložky nulové. Atď.

$(T-\lambda_k I)(T-\lambda_{k+1} I)\dots(T-\lambda_n I)\,x=x^{(k+1)}$

má posledných $(k+1)$ zložiek nulových, teda

10.5

$\chi(T)x = (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I) \dots (T-\lambda_n I)x = x^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a to pre $\forall x$.

Preto matica $\chi(T)$ je nutne nulová: $\chi_T(T) = 0$.

2) Dôkaz C-H vety pre všeobecnú maticu A.
Zo Schurovej lemy vieme, že pre A existuje unitárna U a trojuholníková T:

$$T = U^{-1} A U,$$ pričom T má na diagonále zložky rovné $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - vlastné hodnoty A.
Preto podľa časti 1)

$$0 = \chi_T(T) = (\underbrace{U^{-1}AU - \lambda_1 U^{-1}U}_{T-\lambda_1 I})(\underbrace{U^{-1}AU - \lambda_2 U^{-1}U}_{T-\lambda_2 I}) \dots (U^{-1}AU - \lambda_n U^{-1}U)$$
$$= U^{-1}(A-\lambda_1 I)\cancel{U U^{-1}}(A-\lambda_2 I)\cancel{U \dots U^{-1}}(A-\lambda_n I)U =$$
$$= U^{-1}\underbrace{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\dots(A-\lambda_n I)}_{\chi_A(A)}U.$$

Keďže U a U^{-1} sú regulárne (invertibilné) matice, musí byť aj $\chi_A(A)$ nulová matica.

sem 15.4.19 IX

Poznámky 1) Matica $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ má charakteristický polynóm

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^3$, teda podľa C-H vety máme $(A - aI)^3 = 0$. Ale ak sa prizrieme lepšie, máme aj rovnosť $(A - aI) = 0$, teda niekedy "znuluje" maticu aj polynóm menšieho stupňa ako $\chi_A(\lambda)$ ($< n$)

2) Matica $A' = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ má tiež charakteristický polynóm $\chi_{A'}(\lambda) = (\lambda - a)^3$, môžeme sa však jednoduchým výpočtom presvedčiť, že

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To vedie k nasledujúcej definícii:

Def. Minimálny polynóm matice A je taký (nenulový) polynóm $m(x)$, že $m(A) = 0$, pričom stupeň $m(x)$ je minimálny. (Vedúci člen môžme normalizovať na $+1$).

Pozn. Vieme, že taký polynóm by mal existovať, lebo $\chi(A) = 0$, takže pri stupeň $m_A(\lambda)$ je n.

Tvrdenie Minimálny polynóm matice A $m_A(\lambda)$ je deliteľom charakteristického polynómu $\chi_A(\lambda)$.

Dôkaz ~~Viem~~ Toto tvrdenie je v skutočnosti viac o polynómoch ako o maticiach. Vieme, že $m(A)=0$ aj $\chi(A)=0$.

Delme polynóm $\chi(\lambda)$ polynómom $m(\lambda)$ so zvyškom:

$$\chi(\lambda) = m(\lambda)\underbrace{p(\lambda)}_{\text{podiel}} + \underbrace{z(\lambda)}_{\text{zvyšok}}$$

$m_A(U^{-1}U) =$

Po dosadení matice A máme:

$$\underset{0}{\chi(A)} = \underset{0}{m(A)} \cdot p(A) + z(A).$$

Nutne $z(A)=0$, teda keď do zvyšku $z(\lambda)$ dosadíme maticu A, vyjde nula. Pritom $\deg(z(\lambda)) < \deg(m(\lambda))$, a jediný prípad, keď nedostaneme spor s definíciou $(m(\lambda))$ je až $z(\lambda)=0$, čo sme chceli dokázať. ∎

Pozn Podobným spôsobom sa dá zdôvodniť, že minimálny polynóm $m_A(x)$ je jednoznačne definovaný (ak znormujeme vedúci člen na 1)
→ ak by $m_1(x), m_2(x)$ ~~boli~~ mali minimálne stupne, oba mali vedúci člen 1 a napriek tomu sa líšili, mali by sme aj

$$r(x) = m_1(x) - m_2(x) \quad \text{a}$$

$$\underset{0}{r(A)} = \underset{0}{m_1(A)} - \underset{0}{m_2(A)}, \quad \deg(r(x)) < \deg(m(x))$$

spor. ∎

Pozn Podobné matice majú rovnaké minimálne polynómy.

Dôkaz: cvičenie

(náčrt) Ak A a B sú podobné, $B = M^{-1}AM$, tak

$$m_A(B) = a_k(M^{-1}AM)^k + a_{k-1}(M^{-1}AM)^{k-1} + \dots + a_1(M^{-1}AM) + a_0 I$$

$$= M^{-1}(a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I)M =$$

$$= M^{-1} \underset{0}{m_A(A)} M. = 0$$

Podobne $m_B(A)=0$. Z toho, porovnaním stupňov máme $m_B(\lambda) = m_A(\lambda)$.

7.10.7

Jordanov tvar matice

Pár prednášok dozadu sme začali s otázkou:
"aký najjednoduchší tvar môže mať matica podobná matici A?"
Teraz už máme (snáď) dostatočný vklad, aby sme na túto otázku mohli dať uspokojivú odpoveď.

Veta o Jordanovom kanonickom tvare

Ak má štvorcová matica A typu $n \times n$ práve k lineárne nezávislých vlastných vektorov, potom je podobná tzv. blokovo diagonálnej matici:

$$J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix},$$

kde každý Jordanov blok J_i je horná trojuholníková matica s viacnásobnou vlastnou hodnotou λ_i a práve jedným (až na násobok) vlastným vektorom:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Pozn 1) Ak má blok veľkosť $m > 1$, potom sa vlastná hodnota λ_i vyskytuje na diagonále m-krát a nad diagonálou máme $(m-1)$ jednotiek.

2) Tá istá vlastná hodnota λ_i sa môže vyskytnúť vo viacerých blokoch, každý z nich zodpovedá jednému z lin. nezávislých vektorov pre vl. hodnotu λ_i (t.j. z $N(A-\lambda_i I)$)

3) Matice sú podobné práve vtedy, ak majú rovnaký Jordanov kanonický tvar.

(zatiaľ bez dôkazu)