11.1

Príklad $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- chceme nájsť ich Jordanove tvary.

· Obe matice sú horné trojuholníkové, teda majú nulu ako trojnásobnú vlastnú hodnotu, teda možnosti pre Jordanov tvar sú:

1 blok 3x3 2 bloky 2x2 a 1x1 3 bloky 1x1, 1x1, 1x1

$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ako rozhodnúť?

A má jeden vlastný vektor $(1,0,0) \in N(A - 0 \cdot I)$
$h(A) = 2$
↳ jej ~~kanonický~~ kanonický tvar musí byť J_1

B má dva LN vlastné vektory $(1,0,0), (0,1,0) \in N(B - 0 \cdot I)$
$h(B) = 1$
↳ teda kanonický tvar má dva bloky a tvar J_2.

Ako nájsť maticu M, aby $M^{-1} A M = J_A$?
To je to isté, ako $\boxed{AM = MJ_A}$.

Pozn. Toto sa podobá na rovnicu $AS = S\Lambda$, ~~teda~~ keď sme diagonalizovali maticu A a v matici S mali vlastné vektory - resp. bázu z nich.

To, čo budeme hľadať teraz sú tzv. zovšeobecnené vlastné vektory.

Roznásobením pre $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda m_1 & 1m_1 + \lambda m_2 & 1m_2 + \lambda m_3 \end{pmatrix}$$

čo sa dá zapísať ako sústava troch rovníc:

$A\, m_1 = \lambda \cdot m_1$ ← toto je vlastný vektor

$A\, m_2 = \lambda \cdot m_2 + 1 \cdot m_1$ ← toto sú zovšeobecnené vl. vektory

$A\, m_3 = \lambda \cdot m_3 + 1 \cdot m_2$

Sem 28.4.2015

Ako vektory m_1, m_2, m_3 súvisia? Pozrime sa na zobrazenie dané maticou $(A-\lambda I)$. Potom

$$0 \xleftarrow{A-\lambda I} m_1 \xleftarrow{A-\lambda I} m_2 \xleftarrow{A-\lambda I} m_3$$

Teda tu máme tzv. reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov, ktoré sú spojené prostredníctvom zobrazenia $(A-\lambda I)$.

Počítanie: v našom konkrétnom prípade vyjde (cvičenie)

$m_1 = (1,0,0)^T$

$m_2 = (0,1,0)^T$ (toto nie je jediné riešenie)

$m_3 = (0,-2,1)^T$

Potom
$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow m_1 \ \uparrow m_2 \ \uparrow m_3\end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pre väčšie matice môže byť situácia komplikovanejšia. (Cvičenie – analyzovať situáciu pre B).

→ (sem 29.4.2014)

Def Vlastný vektor sme definovali ako netriviálne riešenie $Ax = \lambda x$, resp. $(A-\lambda I)x = 0$, resp. $x \in N(A-\lambda I)$

Def Zovšeobecnený vlastný vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bude taký vektor, ktorý spĺňa $(A-\lambda I)^k x = 0$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$! (resp. $x \in N((A-\lambda I)^k)$)

Def Priestor tvorený všetkými zovšeobecnenými vlastnými vektormi zodpovedajúcimi tej istej vlastnej hodnote λ (spolu s $\vec{0}$) nazývame zovšeobecnený vlastný podpriestor, značíme ...

sem 26.4.16

Fakty: 1) Zovšeobecnené vlastné ~~sa~~ podpriestory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám majú triviálny prienik (toto je obdoba tvrdenia, že vl. vektory pre rôzne vl. hodnoty sú LN).

2) Ak $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sú všetky vlastné hodnoty $n \times n$ matice A, potom $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} = \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$, ak $\lambda_i \notin \mathbb{R}$).

T.j. priestor $\mathbb{R}^n$ sa rozkladá na vlastné podpriestory.

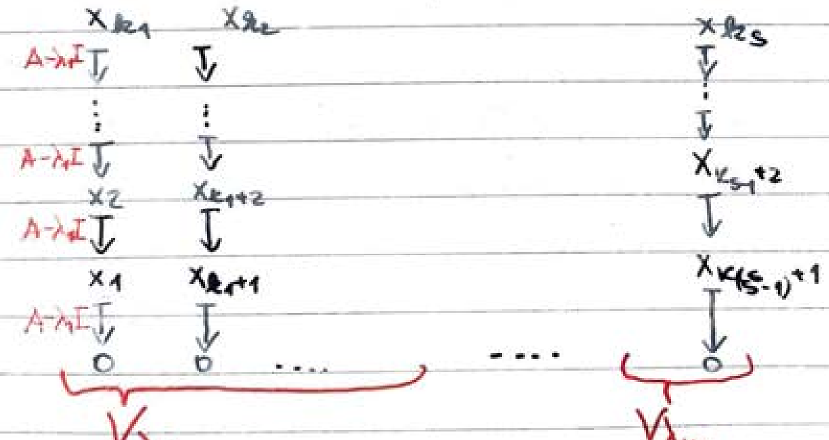
Obe tieto tvrdenia, spolu s Vetou o Jordanovom kanonickom tvare dokážeme, ak nájdeme systém vektorov $x_1, \dots, x_n$ spĺňajúci:

$$A x_i = \lambda_i x_i \quad \text{alebo} \quad A x_i = \lambda_i x_i + x_{i-1}$$

vl. vektor — zovš. vl. vektor

a tvoriaci bázu $\mathbb{R}^n$.

Ako si to predstaviť: zovšeobecnené vlastné vektory pospájame do reťazcov; reťazce prislúchajúce tej istej vlastnej hodnote λ_i "zhrčíme" dokopy.

(*) 

<u>Dôkaz</u> (existencie takéhoto systému, a teda Jordanovej vety)
Matematickou indukciou: (1°) každá 1x1 matica je diagonálna a je automaticky v Jordanovom tvare, ~~teda~~

(2°) nech tvrdenie platí pre všetky $r \times r$ matice, $r < n$. t.j. pre každú $r \times r$ maticu vieme nájsť systém r vektorov, ktoré ~~bázu~~ sú LN a tvoria reťazce zovšeobecnených vl. vektorov ako v (*)

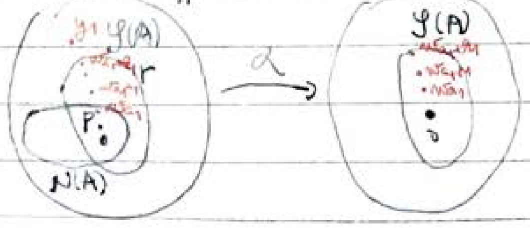
a) Predpokladajme, že A je singulárna, teda nula je jej vlastnou hodnotou.
Ak by to tak nebolo, zoberme maticu $A' = A - \lambda I$.
Potom Jordanov tvar A' bude Jordanov tvar A' plus λI na diagonále, teda nám stačí ukázať, že A' má Jordanov tvar.
λ sa dá zvoliť tak, aby to bola vlastná hodnota A, teda matica A' bude singulárna.

b) Ak je A singulárna, tak dimenzia stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$, $r = \dim \mathcal{S}(A)$ je menšia (ostro) ako n.
Matica A zobrazuje $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{S}(A)$, čiže na tomto podpriestore sa dá zúžiť na zobrazenie popísané nejakou $r \times r$ maticou B, ku ktorej vieme nájsť Jordanov tvar na základe IP a príslušných r lineárne nezávislých vektorov $w_1, w_2, \ldots, w_r$ spĺňajúcich

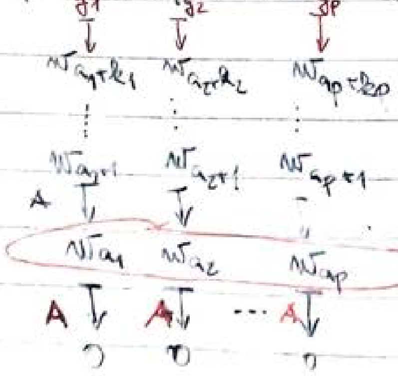
$$A w_i = \lambda_i w_i \qquad \text{alebo} \qquad A w_i = \lambda_i w_i + 1 w_{i-1}.$$

sem 29.4.2019 X

c) Takže máme r vektorov $w_1, \ldots, w_r$ tvoriacich bázu $\mathcal{S}(A)$. Potrebujeme ale vygenerovať aj zvyšok $\mathbb{R}^n$. Pozrime sa na nulový priestor, čo je vlastný podpriestor V_0 zodpovedajúci $\lambda = 0$.
Je celkom možné, že $\mathcal{S}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$ majú netriviálny prienik dimenzie p
- tam patria vlastné vektory k vl. hodnote (lebo patria do $\mathcal{N}(A)$)
- zároveň sa dajú vygenerovať pomocou $w_1, \ldots, w_r$ = bázou $\mathcal{S}(A)$.



Preto z reťazcov z kroku b) bude p zodpovedať vlastnej hodnote 0.



Koncové vektory jednotlivých reťazcov $w_{a_1+k_1}, \ldots, w_{a_p+k_p}$ patria do ... a zároveň neexistuje žiaden vektor z $\mathcal{S}(A)$, ktorý by sa do nich ... pomocou transformácie A ... konečne!. Na druhej strane,

$\mathcal{S}(A) = \operatorname{Im} \alpha$, teda $w_{a_i+k_i} = Ay_i$ pre nejaké y_i nepatriace do $\mathcal{S}(A)$. Preto reťazec môžeme predĺžiť:

$$0 \leftarrow w_{a_i} \leftarrow w_{a_i+1} \leftarrow \dots \leftarrow w_{a_i+k_i} \leftarrow y_i$$

d) Vieme, že nulový priestor $\mathcal{N}(A)$ má dimenziu $n-r$. Preto okrem p rozmerného prienku s $\mathcal{S}(A)$ musí obsahovať ďalších $(n-r-p)$ vektorov z_i mimo $\mathcal{S}(A)$, tak, že tieto spolu s w_{a_i} tvoria bázu $\mathcal{N}(A)$.
Takto sme získali $(n-r-p)$ vektorov z_i, vlastných vektorov.

Rekapitulácia: r vektorov w_i, spĺňajúcich
$$Aw_i = \lambda_i w_i + w_{i-1}$$
p vektorov y_i, spĺňajúcich
$$Ay_i = 0 \cdot y_i + w_{a_i+k_i}$$
$n-p-r$ vektorov z_i spĺňajúcich
$$Az_i = 0 \cdot z_i = 0.$$

Ak takéto vektory vložíme do matice M a správne preusporiadame dostaneme rovnosť

$$AM = MJ.$$

Dôkaz Jordanovej vety bude hotový, ak ukážeme, že existuje inverzná matica M^{-1}, čo je to isté ako ukázať, že vektory w_i, y_i a z_i sú lineárne nezávislé. Zvyšok dôkazu ale až po ilustrácii.

Ilustrácia Majme 5x5 maticu $A' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ so spektrom

$n=5$ spekt $= \{6, 6, 2, 2, 2\}$.

a) Matica A' nie je singulárna, ale $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ už bude.

$r=3$ b) Nahliadneme, že $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}(e_1, e_3, e_5) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

potom matica zodpovedajúca zobrazeniu $\mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(A)$ vzhľadom na bázu e_1, e_3, e_5 bude:

$\alpha(e_1) = 4e_1 + 0e_3 + 0e_5$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\alpha(e_3) = 0e_1 + 0e_3 + 0e_5$

6

Zvoľme potom $w_1 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$,
(IP)

tieto vektory spĺňajú, teda tvoria systém reťazcov, podľa IP.

$A w_1 = 4 w_1$
$A w_2 = 4 w_2 + w_1$
$A w_3 = 0 \cdot w_3$

c) Nulový priestor matice $N(A)$ zodpovedá nulovým stĺpcom, teda

$$N(A) = \text{span}(e_2, e_3) = \text{span}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right],$$ čiže prienik $S(A) \cap N(A)$

$p=1$

je jednorozmerný a generovaný $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Preto existuje vektor y, ktorý sa zobrazením daným maticou A zobrazí do w_3: $y \mapsto Ay = w_3$.

$$A\begin{bmatrix}-1/4\\0\\0\\1/4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix}-1/4\\0\\0\\1/4\\0\end{bmatrix}$$

d) v tejto časti hľadáme $n-p-r = 5-1-3 = 1$ vektor, ktorý patrí do $N(A)$ ale nepatrí do $S(A)$. Takým môže byť napríklad

$$z = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Potom všetkých 5 vektorov tvorí systém reťazcov:
$A w_1 = 4 w_1$, $A w_2 = 4 w_2 + w_1$, $A w_3 = 0 \cdot w_3$, $Ay = w_3$
a $Az = 0 \cdot z$.

Matica J v tomto prípade bude (tri reťazce – tri bloky)

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & \\ & & \boxed{0}\end{pmatrix}$$ a matica $M = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Pokračovanie dôkazu Zostáva nám ukázať, že vektory w_i, y_i, z_i tvoria bázu, teda sú lineárne nezávislé.
Predpokladajme: $\sum \alpha_i w_i + \sum b_i y_i + \sum c_i z_i = 0$.

Vynásobením maticou A zľava dostaneme:

$$\sum d_i \overset{Aw_i}{\begin{pmatrix} \lambda_i w_i \\ \text{alebo} \\ \lambda_i w_i + w_{i-1} \end{pmatrix}} + \sum \overset{Ay_i}{b_i w_{a_i+k_i}} + \sum \overset{Az_i}{c_i \cdot 0} = A \cdot 0 = 0.$$

Čiže všetky komponenty vieme vyjadriť pomocou w_i, ktoré sú bázou $\mathcal{R}(A)$, teda lineárne nezávislé.
Mohlo by sa stať, že takáto kombinácia by dala nulový vektor aj pre nenulové d_i a b_i. Ukážme však, že to nenastáva.
Vektory $w_{a_i+k_i}$ (koncové vektory reťazcov) sa v prvej sume nevyskytujú (ony zodpovedajú $\lambda_i = 0$ a sú koncové). Preto jediný príspevok pochádza z Ay_i, ktorý je b_i, nutne $b_i = 0$, ~~aby sme dostali~~ z lineárnej nezávislosti w_i.

Vrátiac sa k $\sum d_i w_i + \cancel{\sum b_i y_i} + \sum c_i z_i = 0$
stredný člen vypadne a máme

$$\underbrace{\sum d_i w_i}_{\in \mathcal{R}(A)} = - \underbrace{\sum c_i z_i}_{\notin \mathcal{R}(A)}$$ (resp. patrí doplnku).

Pritom vektory z_i boli vyberané tak, aby nepatrili (ani ich netriviálna lin. kombinácia) do $\mathcal{R}(A)$.
Jediná možnosť c_i aj d_i sú nuly, vektory ~~sú~~ w_i, y_i a z_i sú LN, tvoria bázu $\mathbb{R}^n$. ∎

Príklad_ Použitie Jordanových blokových matíc pri mocninách a exponenciálach matíc.

Diagonalizácia matíc sa ukázala výhodná pri počítaní mocnín matice, či jej exponenciály.

Ak $A = S \Lambda S^{-1}$, potom $A^k = S \Lambda^k S^{-1}$

resp. $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$

Ak matica A nie je diagonalizovateľná, situácia sa skomplikuje. Avšak platí: $A = M J M^{-1}$, a teda $A^k = M J^k M^{-1}$

a $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = M\left(I + Jt + \frac{(Jt)^2}{2!} + \dots\right) M^{-1} = M e^{Jt} M^{-1}$

1

Aké sú teda mocniny a exponenciála J (resp. Jt)?

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{sem } 5.5.2015}$

Spravíme pre blok veľkosti 3×3.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$\text{až} \qquad J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

pre väčšie matice by vystupovali kombinačné čísla.

Počítaním $\quad e^{Jt} = I + Jt + \frac{J^2t^2}{2!} + \frac{J^3t^3}{3!} + \dots$

by sme dostali:

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots & 0 + 1t + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \frac{4\lambda^3 t^4}{4!} + \dots & 0 + 0 + \frac{1 t^2}{2!} + \frac{3\lambda t^3}{3!} + \frac{4\cdot 3 \lambda^2 t^4}{2 \cdot 4!} + \dots \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots & 0 + 1t + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \frac{4\lambda^3 t^4}{4!} + \dots \\ 0 & 0 & 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \end{pmatrix}$$

na hlavnej diagonále je "čistá exponenciála" $e^{\lambda t}$.

Na ďalšej dostaneme

$$\left(0 + 1t + \frac{2\lambda t^2}{2!} + \frac{3\lambda^2 t^3}{3!} + \frac{4\lambda^3 t^4}{4!} + \dots\right) = t\left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots\right) = te^{\lambda t}$$

Na ďalšej:

$$0 + 0 + \frac{1 \cdot t^2}{2!} + \frac{3\lambda t^3}{3!} + \frac{4 \cdot 3/2\, \lambda^2 t^4}{4!} + \dots = \frac{t^2}{2}\left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots\right) = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}$$

$$\text{Výsledok} \qquad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Pozn. Týmto sme našli všeobecné riešenie aj lineárnych dif. a diferenciálnych rovníc aj pre nediagonalizovateľné matice okrem čistých mocninových riešení $c_i \lambda_i^k y_i$, resp. čistých exponenciálnych riešení $c_i e^{\lambda_i t} y_i$ tu budú vystupovať aj polynomiálno-mocninové, resp. polynomiálno-exponenciálne riešenia tvaru

$$c_i\, p(k)\, \lambda_i^k y_i \quad \text{resp} \quad c_i\, p(t)\, e^{\lambda_i t} y_i.$$

Sem 9.5.17

Zhrnutie –

Podobnosť matíc

1) A je diagonalizovateľná:
   stĺpce matice S sú vlastné vektory a $S^{-1}AS = \Lambda$ je diagonálna.

2) A je ľubovoľná
   stĺpce matice M sú vlastné vektory a zovšeobecnené vlastné vektory, Jordanov tvar $M^{-1}AM = J$ je blokovo diagonálny

3) A je ľubovoľná a U je vhodná unitárna. U sa dá vybrať tak, že $U^{-1}AU = U^H AU = T$ je horná trojuholníková.

4) Špeciálne matice: A je normálna $A^H A = AA^H$, ~~práve~~ potom sa U dá vybrať tak že $U^{-1}AU = \Lambda$ je diagonálna
   a) A je hermitovská – Λ je reálna
   a') A je reálna symetrická – Λ je reálna, $U = Q$ je ortogonálna
   b) A je anti-hermitovská – Λ je rýdzo imaginárna
   c) A je ortogonálna alebo unitárna → všetky $|\lambda_i| = 1$.

Sem 30.4.13