okrem čistých mocninových riešení $c_i \lambda_i^k y_i$, resp. čistých exponenciálnych riešení $c_i e^{\lambda_i t} y_i$ tu budú vystupovať aj polynomiálno-mocninové, resp. polynomiálno-exponenciálne riešenia tvaru

$$c_i\, p(k)\, \lambda_i^k y_i \quad \text{resp} \quad c_i\, p(t)\, e^{\lambda_i t} y_i .$$

Sem 9.5.17

Zhrnutie

Podobnosť matíc

1) A je diagonalizovateľná:
stĺpce matice S sú vlastné vektory a $S^{-1}AS = \Lambda$ je diagonálna.

2) A je ľubovoľná
stĺpce matice M sú vlastné vektory a zovšeobecnené vlastné vektory, Jordanov tvar $M^{-1}AM = J$ je blokovo diagonálny

3) A je ľubovoľná a U je vhodná unitárna. U sa dá vybrať tak, že $U^{-1}AU = U^H A U = T$ je horná trojuholníková.

4) Špeciálne matice: A je normálna $A^H A = AA^H$, ~~[illegible]~~ potom sa U dá vybrať tak že $U^{-1}AU = \Lambda$ je diagonálna
   a) A je Hermitovská – Λ je reálna
   a') A je reálna symetrická – Λ je reálna, $U = Q$ je ortogonálna
   b) A je anti-hermitovská – Λ je rýdzo imaginárna
   c) A je ortogonálna alebo unitárna $\rightarrow$ všetky $|\lambda_i| = 1$.

Sem 30.4.13

Kvadratické formy

V zostávajúcej časti semestra sa budeme venovať kvadratickým (prípadne bilineárnym) formám a súvisiacim témam (kužeľosečky).

Motivácia (Ukážeme si, kde sa kvadratické formy vyskytujú prirodzeným spôsobom, príklad z analýzy

Majme dve funkcie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$:

$$F(x,y) = 7 + 2(x+y)^2 - \sin^2 y - x^3$$

a $$f(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^2$$

Chceli by sme nakresliť ich priebeh, skúmať lokálne minimá a maximá, nakresliť obrázok...
Budú mať lokálne minimum v bode $(x,y) = (0,0)$?

Z analýzy funkcie jednej premennej máme kritérium pre lokálne minimum v bode x_0
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 +$ zvyšok

1) na hodnote $f(x_0)$ nezáleží.

2) $f'(x_0) = 0$ (lineárna aproximácia musí byť nulová

3) $f''(x_0) > 0$ (funkcia $f(x)$ je v okolí x_0 konvexná, preto je v x_0 minimum.

Ako by sme takúto vec vedeli zovšeobecniť pre funkciu
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y) \mapsto f(x,y)$?

Taylorov rozvoj vo vyšších dimenziách?

1) na hodnote $f(x_0,y_0)$ nezáleží

2) lineárne členy $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sú nulové v (x_0,y_0) - kritický

(Tu vystupujú tzv. parciálne derivácie - derivujeme v jednom smere, druhú premennú držíme fixnú.

v našom konkrétnom príklade: $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 3x^2 + 4y \Big|_{0,0} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4(x+y) - 2\sin y \cos y \Big|_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 4y \Big|_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y \Big|_{0,0} = 0$$

3) Kvadratické člény? Druhé derivácie ... parciálne

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4x - 3x^2 + 4y\right) = 4 - 6x = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4 - 2\cos^2 y + 2\sin^2 y = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Čiže funkcie F a f majú rovnaké prvé a druhé parciálne derivácie v bode (0,0), mali by byť "zhruba rovnaké" v okolí (0,0) (až na tú +7 z absolútneho členu)

Je bod $(x,y) = (0,0)$ minimum? Všetky druhé derivácie sú kladné, mohlo by to fungovať...

Taylor: $f\binom{x}{y} = f\binom{x_0}{y_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\binom{x-x_0}{y-y_0} + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}\binom{x-x_0}{y-y_0} + zv$

~~[illegible]~~ ... $f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y} = (x,y)\binom{2x+2y}{2x+y} = 2x^2 + 2xy + 2yx + y^2$

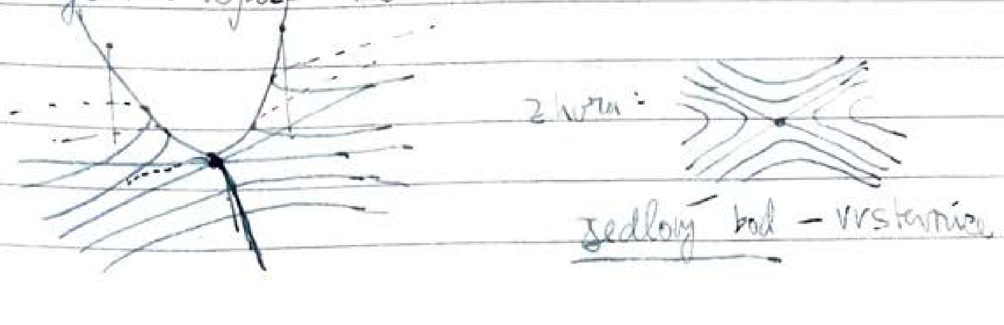
a potom ~~$f(x,y) \approx F(x,y) - 7$~~. $F(x,y) \approx f(x,y) + 7$

Ak však zvolíme za $\binom{x}{y} = \binom{1}{-1}$ máme

$$f(1,-1) = 2\cdot(1)^2 + 4(1)(-1) + 1(-1)^2 = -1.$$

Preto v smere (1,-1) bude $f(x,y)$ záporná!

Obrázok by vyzeral nejako takto:



5

otázka: Ako by sme pre kvadratickú funkciu
$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zistili či má $f(x,y)$ v $(0,0)$ lokálne minimum / maximum / sedlový bod

→ tu sa dostávame k metóde doplnenia na štvorce:

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2\right) + cy^2 - \frac{b^2}{a}y^2$$

Táto vec je kladná pre všetky $(x,y) \neq (0,0)$ práve vtedy ak $a > 0$ a $c - \frac{b^2}{a} > 0$, resp. $a > 0$, $ac - b^2 > 0$

To by mohlo vyzerať povedomo - jedná sa o subdeterminanty matice
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Takže skúsme teóriu s tohto príkladu nejako sformalizovať.
(alebo kvadratická forma) na $\mathbb{R}^n$)

Def Kvadratická funkcia premenných $(x_1, x_2, .., x_n) = x$ je zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ ...
dané predpisom
$$f(x) = x^T A x = (x_1, .., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Maticu A berieme vždy symetrickú.

Pozn: Lebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, teda táto požiadavka je hlbšia - nielen preto, aby nám reci vychádzali

Def. Hovoríme, že kvadratická forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je

a) kladne definitná ak $f(x) > 0$ pre všetky $x \neq 0$

b) záporne definitná ak $f(x) < 0$ pre všetky $x \neq 0$

c) kladne semidefinitná $f(x) \geq 0$

d) ~~kd~~ záporne semidefinitná $f(x) \leq 0$

e) indefinitná - ak $\exists x$ $f(x) > 0$ a $\exists y$ $f(y) < 0$
- má sedlový bod.

Videli sme, že ak $a>0$ $+$ → máme kladne definitnú formu
$ac-b^2>0$ $+$

Rovnako sa dá presvedčiť, že ak $a<0$ $-$, tak forma bude záporne definitná.
$ac-b^2>0$ $+$

Pre semidefinitné by sme mali napríklad:

$a>0$, $a<0$
$ac-b^2=0$

Vráťme sa naspäť k dopĺňaniu na úplné štvorce:

$$f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2 = a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2$$

to zodpovedá maticiam:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Takže pri dopĺňaní formy na úplné štvorce sa nám prirodzeným spôsobom objavili v zápise kvadratickej formy pivoty z eliminácie. S tým súvisia aj subdeterminanty, ako sme videli koncom I. semestra.

(Sylvestrovo kritérium)

Tvrdenie Pre symetrickú $n\times n$ maticu sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

I) kvadratická forma daná maticou A je kladne definitná, (t.j. $x^TAx>0$ pre všetky nenulové $x\in\mathbb{R}^n$)

II) všetky vlastné hodnoty matice A spĺňajú $\lambda_i>0$

III) Všetky ľavé horné podmatice majú kladné determinanty. (Subdeterminanty minorov sú $+$)

IV) Eliminácia prebehne bez výmeny riadkov a všetky pivoty spĺňajú $d_i>0$.

Dôkaz (I ⇒ II) Nech λ_i je vlastná hodnota. Potom $Ax_i=\lambda x_i$, navyše predpokladajme $\|x_i\|=1$. Dosadením do kvadratickej formy máme $f(x_i) = x_i^T A x_i = x_i^T(\lambda_i x_i) = \lambda_i \|x_i\|^2 = \lambda_i > 0$.

II ⇒ I Matica A je symetrická, teda jej vlastné hodnoty sú reálne a vlastné vektory môžeme brať ortonormálne (veta o hlavných osiach).

Nech $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Potom $f(x) = x^TAx = (c_1x_1 + \dots + c_nx_n)^T(c_1\lambda_1x_1 + \dots + c_n\lambda_nx_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i^T c_j \lambda_j x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i x_i^T x_i =$$

$$= c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + \dots + c_n^2\lambda_n^2.$$

Lebo vektory x_i, x_j sú kolmé ak $i \neq j$ ($x_i^Tx_j = 0$), resp. jednotkovej dĺžky.

Ak $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ (t.j. $x \neq 0$) a $\lambda_i > 0$, tak $f(x) > 0$ a forma je kladne definitná.

I ⇒ III Vieme, že determinant ~~kladnej~~ matice sa rovná súčinu jej vlastných hodnôt $\det A = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. Už sme však ukázali, že pre kladne definitné matice sú kladné, teda $\det A > 0$.

K ukázaniu časti III si treba uvedomiť, že pre kladne definitnú maticu je aj jej ~~ľa~~ ľavá horná $k \times k$ podmatica kladne definitná:

pre $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ máme:

$$0 < x^TAx = [x_k^T \ 0]\begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = x_k^T A_k x_k.$$

Teda aj A_k je kladne definitná ⇒ $\det A_k > 0$.

III ⇒ IV Koncom I semestra sme spočítali, že

$\dfrac{\det A_k}{\det A_{k-1}} = d_k$, preto z kladnosti su navzájom máme aj kladnosť pivotov (a netreba výmenu riadkov pri eliminácii).

($\mathrm{IV} \Rightarrow \mathrm{I}$) Ak sú pivoty kladné, potom pri eliminácii dostaneme: $A = LDU$, D je diagonála s kladnou diag.

Lenže pre symetrickú maticu A máme:
$A = A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T$ – čo je ďalší LDU rozklad. Z toho $U^T = L$ a $L^T = U$, teda z eliminácie dostávame $A = LDL^T$.

sem 12.5.15

Potom $f(x) = x^T A x = x^T (LDL^T) x = (L^T x)^T D (L^T x)$

$$= ((L^Tx)_1, (L^Tx)_2, \dots, (L^Tx)_n) \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L^Tx)_1 \\ (L^Tx)_2 \\ \vdots \\ (L^Tx)_n \end{pmatrix} =$$

$$= d_1 (L^Tx)_1^2 + d_2 (L^Tx)_2^2 + \dots + d_n (L^Tx)_n^2 > 0$$

Pre $x \neq 0$ je $L^T x \neq 0$ (L^T je regulárna) a z kladnosti d_i máme kladnú definitnosť. ■

Príklad Situáciu z dôkazu si môžme ilustrovať na príklade:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3/2 & \\ & & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDL^T$$

potom $$x^T A x = [u, v, w] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(u - \frac{1v}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(v - \frac{2}{3}w\right)^2 + \frac{4}{3}w^2$$

Pozn Kvadratické formy možno definovať aj pre $x \in \mathbb{C}^n$: ~~potom~~ $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$
~~požadujeme~~ $f(x) = x^H A x \in \mathbb{R}$
potom požadujeme, aby A bola hermitovská matica, ~~~~
presunúť na koniec

Pozn Ak sa pozornejšie zadívame na predošlý príklad, tak vidíme eliminácia a doplňanie kvadratickej formy na štvorce je v zásade tá istá vec (pokiaľ nedochádza k výmene riadkov)

Cvičenie Skúsiť upraviť kvadratickú formu danú maticou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ na úplné štvorce.

Sem 16.5.

Možno trochu prekvapivo, ale kladne definitné matice (alebo aspoň kladne semidefinitné) sa vyskytnú pri metóde najmenších štvorcov.

Ako si spomíname, vzorec pre projekčnú maticu:

$$P = R(R^TR)^{-1}R^T$$

- Ukázali sme, že matica R^TR je symetrická a ak stĺpce R sú LN, tak aj regulárna.

- Matica R^TR je však aj kladne definitná:

$$x^T(R^TR)x = (Rx)^T(Rx) = \|Rx\|^2 > 0$$

čo je naozaj kladné pre maticu R s LN stĺpcami

Máme teda 5.-tu podmienku kladnej definitnosti:

(V) A sa dá napísať ako $A = R^TR$ pre regulárnu maticu R.

Príklady Rozklad A na R^TR nie je jednoznačný:

- z eliminácie máme:

$$A = LDL^T \rightsquigarrow A = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = (D^{1/2}L^T)^T \ldots$$

- zo spektrálneho rozkladu

$$A = Q\Lambda Q^T \longrightarrow A = Q\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}Q^T = (\Lambda^{1/2}Q^T)^T \ldots$$