minorov máme aj kladnosť pivotov (a netreba výmenu riadkov pri eliminácii).

(II ⇒ I) Ak sú pivoty kladné, potom pri eliminácii dostaneme: $A = LDU$, D je diagonálna s kladnou diag.

Lenže pre symetrickú maticu A máme:
$$A = A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T$$ – čo je ďalší LDU rozklad. Z toho $U^T = L$ a $L^T = U$, teda z eliminácie dostávame $A = LDL^T$.

$\boxed{\text{sem 12.5.15}}$ ←

Potom $$f(x) = x^T A x = x^T (LDL^T) x = (L^T x)^T D (L^T x)$$
$$= \left((L^Tx)_1, (L^Tx)_2, \dots, (L^Tx)_n\right) \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (L^Tx)_1 \\ (L^Tx)_2 \\ \vdots \\ (L^Tx)_n \end{pmatrix} =$$
$$= d_1 (L^Tx)_1^2 + d_2 (L^Tx)_2^2 + \dots + d_n (L^Tx)_n^2 > 0$$

Pre $x \neq 0$ je $L^T x \neq 0$ (L^T je regulárna) a z kladnosti d_i máme kladnú definitnosť. ∎

Príklad. Situáciu z dôkazu si môžeme ilustrovať na príklade:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3/2 & \\ & & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDL^T$$

potom $$x^T A x = [u, v, w] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} =$$
$$= 2\left(u - \frac{1v}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(v - \frac{2}{3}w\right)^2 + \frac{4}{3}w^2$$

Pozn. Kvadratické formy možno definovať aj pre $x \in \mathbb{C}^n$: ~~potom~~ $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$
požadujeme $f(x) = x^H A x \in \mathbb{R}$
potom požadujeme, aby A bola hermitovská matica, ~~čím~~
presunúť na koniec

Pozn. Ak sa podrobnejšie zadívame na predošlý príklad, tak vidíme, eliminácia a dopĺňanie kvadratickej formy na štvorce je v zásade tá istá vec (pokiaľ nedochádza k výmene riadk…

Cvičenie Skúsiť upraviť kvadratickú formu danú maticou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ na úplné štvorce.

sem 16.5.…

Možno trochu prekvapivo, ale kladne definitné matice (alebo aspoň kladne semidefinitné) sa vyskytnú pri metóde najmenších štvorcov.

Ako si spomíname, vzorec pre projekčnú maticu:

$$P = R(R^TR)^{-1}R^T$$

- Ukázali sme, že matica R^TR je symetrická a ak stĺpce R sú LN, tak aj regulárna.

- Matica R^TR je však aj kladne definitná:

$$x^T(R^TR)x = (Rx)^T(Rx) = \|Rx\|^2 > 0$$

čo je naozaj kladné pre maticu R s LN stĺpcami.

Máme teda 5.-tu podmienku kladnej definitnosti:

(V) A sa dá napísať ako $A = R^TR$ pre regulárnu maticu R.

Príklady Rozklad A na R^TR nie je jednoznačný.

- z eliminácie máme:

$$A = LDL^T \longrightarrow A = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = (D^{1/2}L^T)^T(\ldots$$

- zo spektrálneho rozkladu

$$A = Q\Lambda Q^T \longrightarrow A = Q\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}Q^T = (\Lambda^{1/2}Q^T)^T(\ldots$$

ale aj

$$A = Q\Lambda Q^T \qquad A = \left(Q\Lambda^{1/2}Q^T\right)\left(Q\Lambda^{1/2}Q^T\right)$$

- Tieto tri rozklady existujú vďaka kladnej definitnosti ($\Lambda^{1/2}$ a $D^{1/2}$ sú dobre definované)
- Posledný má tú výhodu, že matica $Q\Lambda^{1/2}Q^T$ je symetrická.

Pozn kvadratické formy $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^H A x$.

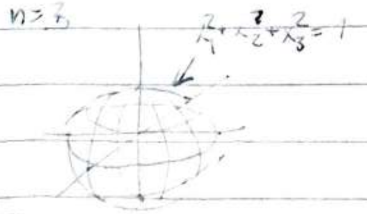
Kuželosečky, elipsoidy

Riešili sme rovnice typu $Ax=0$, $Ax=b$ ← riešeniami boli roviny, priamky, vektorové podpriestory - rovné veci.

Môžeme sa však pýtať: aká množina bude riešením
$$x^T A x = \text{konšt.} \quad ?$$

Ak $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$, tak dostávame rovnicu:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$ ← riešením je (n-1) rozmerná sféra. - konečne niečo guľaté...



- zovšeobecnenie ? (elipsy, elipsoidy, hyperboloidy...)

Príklad

Pozrime sa na príklad kladne definitnej matice:

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad x^T A x = 5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$.

Sem 7.5. 2013 ←

- pôjde o elipsu, jej stred je (0,0).
- Ako nájsť jej osi? Tie budú zodpovedať jej vlastným vektorom (veta o hlavných osiach).

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$ ortonormálne vlastné vektory $x_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

potom rovnica $1 = 5u^2 + 8uv - 5v^2 = [u,v]\, A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

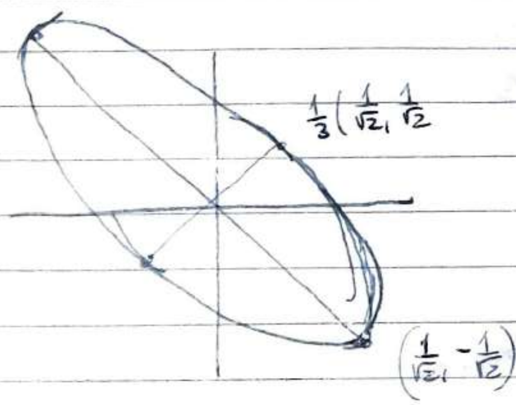
sa da prepísať na:

$$[u,v]\; Q \Delta Q^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$$

$$= [u,v] \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}},\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \right] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2 + 9 \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2.$$



Prvá zátvorka je zodpovedná za veľkú poloos (body $\pm\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$).

Druhá zátvorka za malú poloos (body $\pm \underset{\frac{1}{\sqrt{9}}}{\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}}} \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$)

Vo všeobecnosti:

$$c = x^T A x = (x^T Q) \Delta (Q^T x) = y^T \Delta y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

pri zmene súradníc $y = Q^T x$.

Potom y_i môže byť najviac $\pm\sqrt{\frac{c}{\lambda_i}}$, teda dĺžky hlavných osí elipsoidu sú $\sqrt{c}/\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{c}/\sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{c}/\sqrt{\lambda_n}$, smery sú vlastné vektory $x_1, \dots, x_n$.

SEMIDEFINITNOSŤ, ZÁPORNÁ DEFINITNOSŤ

~~Zmena kvadratickej formy pri zmene súradníc~~

Začali sme s kvadratickou formou $f(x) = x^T A x$ a videli sme dôležitú úlohu, ktorú hrajú rozklady:

$$A = LDL^T$$

$$A = Q \Delta Q^T.$$

Obe predstavujú diagonalizáciu kvadratickej formy a znamienka v D (resp. Δ) vypovedajú o definitnosti. Sylvestrovo krit hovorí, že ~~zd~~ znamienka v D (pivoty) sú kladné práve vtedy, keď sú kladné aj znamienka v Δ (vl. hodnoty).

(A potom $x^TAx=1$ je rovnicou $(n-1)$ rozmerného elipsoidu).

Vo všeobecnosti by sme sa mohli pýtať, či existujú obdoby Sylvestrovho kritéria pre rozhodnutie kladnej semidefinitnosti či zápornej definitnosti.
Ako uvidíme, nakoniec to celé bude o znamienkach D, resp. Δ.

Tvrdenie Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

I) Matica A je kladne semidefinitná t.j. $x^TAx \geq 0$ $\forall x \in R^n$	záporne definitná $x^TAx < 0$ pre $x \neq 0$.
II) Všetky vl. hodnoty A spĺňajú $\lambda_i \geq 0$	$\lambda_i < 0$
III) všetky ~~hlavné~~ $k \times k$ ~~podmatice~~ minory majú nezáporné determinanty	hlavné podmatice párnej dimenzie kladný det, hlavné podmatice nepárnej dimenzie záporný det.
IV) pivoty sú nezáporné, resp. eliminácia zlyhá a túto podmienku treba vypustiť	pivoty sú záporné, eliminácia nezlyhá
V) existuje matica R spĺňajúca $A = R^TR$ R môže mať LZ stĺpce	$\exists R$, s LN stĺpcami $A = -R^TR$

Důkaz Analogický ako Sylvestrovo kritérium.

Pozn. Keďže matica A je diagonalizovateľná (veta o hl. osiach) tak $h(A) =$ počet nenulových vl. hodnôt $=$ počet úplných štvorcov v x^TAx.

Príklady $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ aké subdeterminanty?

(t.j. treba sa pozrieť na všetky minory aby sme určili definitnosť.)

ZMENA KVADRATICKEJ FORMY PRI ZMENE SÚRADNÍC

Pristavme sa ešte na chvíľu pri rozkladoch matice kvadratickej formy:

$$A = LDL^T = Q\Delta Q^T = Q\Delta Q^{-1}$$

~~Pre kladne definitné sme dostali $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, $A = \ldots$~~

Druhý rozklad zodpovedá diagonalizácii matice A pomocou ortogonálnej matice vl. vektorov Q, teda je to podobnosť s diagonálnou maticou Δ.
V prvom prípade však ide o niečo iné... To podobnosť nie je

Vysvetlením je, ako to už nadpis napovedá, zmena súradníc.
Nech $x = Cy$, teda regulárna matica C nám udáva prechod od súradníc x k novým súradniciam y.

Potom:

$$f(x) = x^T A x = (Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y = f'(y).$$

Čiže matica A kvadratickej formy $f(x)$ sa zmenila na maticu $C^T A C$ kvadratickej formy $f'(y)$ v nových súradniciach.

Def. Hovoríme, že **matica** A a $C^T A C$ sú kongruentné.

Pozn. • Ak A je symetrická, aj $C^T A C$ je symetrická.

• Kongruentnosť je relácia ekvivalencie:

$$A = I^T A I$$ – reflexívnosť

– symetria

– tranzitívnosť.

Podobne ako pri podobnosti matíc sa môžeme pýtať na najjednoduchšiu maticu v danej triede kongruencie -

na tzv. kanonický tvar kvadratickej formy. Ten bude súvisieť s tzv. signatúrou kvadratickej formy - početnosťou znamienok vlastných hodnôt, ktoré sa prechodom od A k C^TAC zachovávajú vďaka nasledujúcej vete:

Tvrdenie (Sylvestrov zákon zotrvačnosti)
Matica C^TAC má rovnaký počet kladných, záporných a nulových vlastných hodnôt ako matica A.

Dôkaz Predpokladajme, že A je regulárna, t.j. 0 nie je vlastnou hodnotou.

(Ak by bola, stačí tvrdenie dokázať pre $A+\varepsilon I$ a $A-\varepsilon I$, ktoré sa malou perturbáciou dajú spraviť regulárne.)

Potrebujeme teda odsledovať počty kladných a záporných vl. hodnôt.

Dôkaz v knižke používa pekný matematický trik - preto si ho ukážeme, aj keď technické detaily nespravíme kompletne; myšlienka za to stojí.

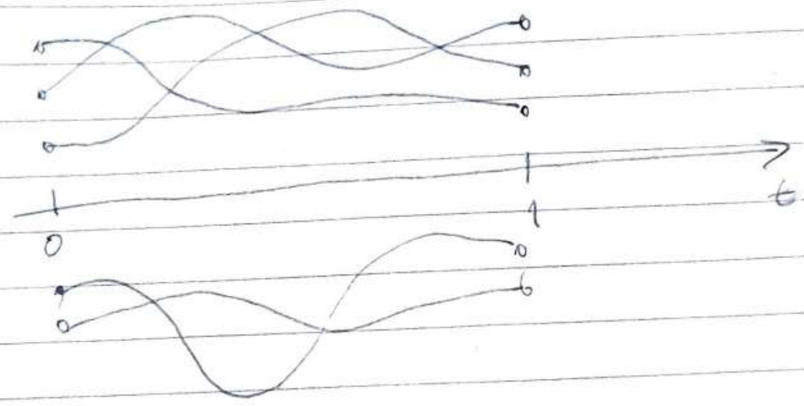
Matica C reprezentuje nejakú bázu v $\mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti jej vektory nie sú kolmé ani nemajú jednotkovú dĺžku. Môžeme však vytvoriť triedu matíc $C(t)$, kde budeme túto bázu postupne spojito "kolmiť" a "normalizovať". Pritom si dáme pozor, aby sme stále zachovali jej lineárnu nezávislosť - matice $C(t)$ budú regulárne pre všetky časy t.

Dostaneme takto triedu $C(t)$, $0 \le t \le 1$, kde $C(0) = C$ (pôvodná matica) a $C(1) = Q$ (ortogonálna matica).

$C(t) = Q((1-t)R + tI)$
$C = QR$

Potom $C^T(t)\, A\, C(t)$ je regulárna $n\times n$ matica pre každé $t \in \langle 0,1\rangle$ (súčin troch regulárnych). Teda má nejaké kladné a nejaké záporné vlastné hodnoty (nulové nemá). Vlastné hodnoty $C^T(t) A C(t)$ môžeme nakresliť do (multi) grafu:

6 C^TAC $\qquad Q^TAQ = Q^{-1}AQ$



Čo tento obrázok znamená? Žiadna čiara nepretína nulu
- lebo všetky matice $C^T(t)AC(t)$ sú regulárne, nemáme nulovú vl. hodnotu.
- Naozaj ide o čiary – matice $C(t)$ sa menia spojito, aj matice $C^T(t)AC(t)$ sa menia spojito, aj ich vl. hodnoty sa menia spojito
- preto počet kladných (a záporných) vlastných hodnôt v čase $t=0$ a $t=1$ musí byť rovnaký.
- Lenže vlastné hodnoty matice $C^T(1)AC(1) = Q^TAQ = Q^{-1}AQ$ sú rovnaké ako vl. hodnoty matice A (podobnosť.)

čbtd

<u>Dôsledok</u> Vďaka diagonalizácii $A = Q^T\Lambda Q$ (cez vlastné vektory) a $A = LDL^T$ (Gaussova eliminácia) vidíme, že matice A, Λ a D sú kongruentné. Vlastné hodnoty Λ a D sú priamo ~~vlastne~~ ich diagonálne zložky, preto početnosť ich znamienok (signatúra) je rovnaká.

Jeu 19.5.2015 -20min
Ivan Elmo

Def <u>Signatúra</u> kvadratickej formy $f(x) = x^TAx$ je (k, z, n)
k – počet kladných vl. hodnôt
z – počet záporných vl. hodnôt
n – počet nulových vl. hodnôt (násobnosť $\lambda=0$).

→

Vďaka rozkladu $A = LDL^T$ to je však to isté ako počty kladných, záporných, nulových pivotov. (pozor na prípad, keď eli zlyhá! t.j. $n \neq 0$

Def/Tvrd Vhodnou zmenou súradníc sa ľubovoľná kvadratická forma dá upraviť na kvadratickú formu:

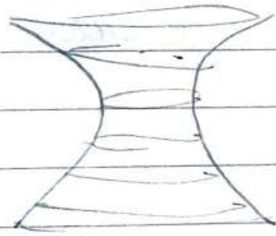
$$f(y) = y^T \begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{k} & & \\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{z} & \\ & & \overbrace{0 \; \ddots \; 0}^{n} \end{pmatrix} y$$

danú diagonálnou maticou s 1, -1, a 0 na diagonále, signatúra (k, z, n). Táto forma je určená kanonicky (jednoznačne) pôvodnou formou (vďaka signatúre) (a sylv. zákonu zotrvačnosti). Zmena súradníc ale kanonická (jednoznačná) nie je.

Geometrický význam

Ak chceme zistiť aký typ plochy (resp. nadplochy) určuje kvadratická forma $f(x) = x^T A x = 1$, potrebujeme zistiť jej signatúru. Podľa toho sa zistí počet^{ne} osí, ktoré sa s plochou pretínajú, resp. počet osí, ktoré sa jej vyhýbajú. elipsoid, hyperboloid a pod:

sign $(1,-1,-1)$



sign $(1,1,-1)$

Bilineárne formy

Videli sme dávnejšie, že norma (resp. jej druhá mocnina) a skalárny súčin spolu súvisia:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^T I x$$

Kvadratické formy boli vlastne akési zovšeobecnenia $\|x\|^2$.

Preto sa môžeme prirodzene pozrieť na funkciu:

$$\varphi(x,y) = y^T A x \qquad \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Takáto funkcia spĺňa podmienku bilinearity, je lineárna v oboch funkčných zložkách:

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y) \quad \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \varphi(x, y_1) + \beta \varphi(x, y_2) \quad \forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in$$

• Bilineárna forma $\varphi(x,y)$ je symetrická, ak spĺňa

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

teda: $y^T A x = x^T A y$.

Lenže ide o 1×1 matice, tak $(y^T A x) = (y^T A x)^T = x^T A^T y$.

Preto ~~matica~~ $A = A^T$ dá symetriu bilineárnej formy.

• Špeciálnym prípadom bilineárnych foriem $\underbrace{}_{V \times V \to \mathbb{R}}$ sú ~~s~~ skalárne súčiny, ktoré spĺňajú:

1) symetria $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2) bilinearita $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$
3) kladná definitnosť $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

– čím sa dostávame k symetrickým kladne definitným maticiam...

A dalo by sa pokračovať...

– singulárny rozklad $A = U \Sigma V^T$
(pre obdĺžnikové matice)

– Raleyighov podiel $R = \frac{x^T A x}{x^T x}$

– pseudoinverznú maticu A^+