na tzv. kanonický tvar kvadratickej formy. Ten bude súvisieť s tzv. signatúrou kvadratickej formy - početnosťou znamienok vlastných hodnôt, ktoré sa prechodom od A k C^TAC zachovávajú vďaka nasledujúcej vete:

Tvrdenie (Sylvestrov zákon zotrvačnosti)
Matica C^TAC má rovnaký počet kladných, záporných a nulových vlastných hodnôt ako matica A.

Dôkaz Predpokladajme, že A je regulárna, t.j. 0 nie je vlastnou hodnotou.

(Ak by bola, stačí tvrdenie dokázať pre $A+\varepsilon I$ a $A-\varepsilon I$, ktoré sa malou perturbáciou dajú spraviť regulárne.)

Potrebujeme teda odsledovať počty kladných a záporných vl. hodnôt.

Dôkaz v knižke používa pekný matematický trik - preto si ho uvedieme, aj keď technické detaily nespravíme kompletne; myšlienka zostáva.

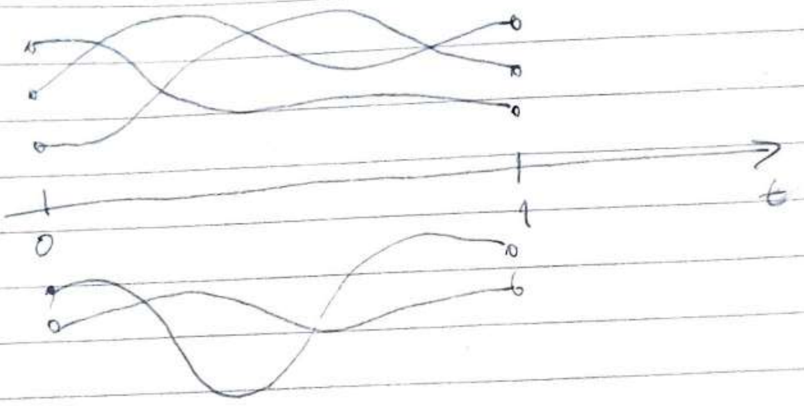
Matica C reprezentuje nejakú bázu v $\mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti jej vektory nie sú kolmé ani nemajú jednotkovú dĺžku. Môžeme však vytvoriť triedu matíc $C(t)$, kde budeme túto bázu postupne spojito "kolmiť" a "normalizovať". Pritom si dáme pozor, aby sme stále zachovali jej lineárnu nezávislosť - matice $C(t)$ budú regulárne pre všetky časy t.

Dostaneme takto triedu $C(t)$, $0 \leq t \leq 1$, kde $C(0) = C$ (pôvodná matica) a $C(1) = Q$ (ortogonálna matica).

$C(t) = Q((1-t)R + tI)$
$C = QR$

Potom $C^T(t)\,A\,C(t)$ je regulárna $n\times n$ matica pre každé $t \in \langle 0,1\rangle$ (súčin troch regulárnych). Teda má nejaké kladné a nejaké záporné vlastné hodnoty (nulové nemá). Vlastné hodnoty $C^T(t)\,A\,C(t)$ môžeme nakresliť do (multi) grafu:

6 C^TAC $Q^TAQ = Q^{-1}AQ$



Čo tento obrázok znamená? Žiadna čiara nepretína nulu

- lebo všetky matice $C^T(t)AC(t)$ sú regulárne, nemáme nulovú vl. hodnotu.
- Naozaj ide o čiary – matice $C(t)$ sa menia spojito, aj matice $C^T(t)AC(t)$ sa menia spojito, aj ich vl. hodnoty sa menia spojito
- preto počet kladných (a záporných) vlastných hodnôt v čase $t=0$ a $t=1$ musí byť rovnaký.
- Lenže vlastné hodnoty matice $C^T(1)AC(1) = Q^TAQ = Q^{-1}A$ sú rovnaké ako vl. hodnoty matice A (podobnosť.)

čbtd

Dôsledok: Vďaka diagonalizácii $A = Q^T\Lambda Q$ (cez vlastné vektory) a $A = LDL^T$ (Gaussova eliminácia) vidíme, že matice A, Λ a D sú kongruentné. Vlastné hodnoty Λ a D sú priamo ~~vlastne~~ ich diagonálne zložky, preto početnosť

Jeu 19.5.2015 -20min ich znamienok (signatúra) je rovnaká.

Def. Signatúra kvadratickej formy $f(x) = x^TAx$ je (k, z, n)

k – počet kladných vl. hodnôt

z – počet záporných vl. hodnôt

n – počet nulových vl. hodnôt (násobnosť $\lambda=0$).

→

Vďaka rozkladu $A=LDL^T$ to je však to isté ako počty kladných, záporných, nulových pivotov. (pozor na prípad, keď eli... zlyhá! t.j. $n \neq 0$)

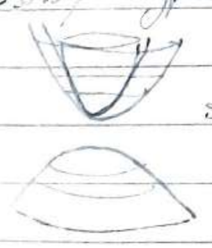
Def/Tvrd: Vhodnou zmenou súradníc sa každá kvadratická forma dá upraviť na kvadratickú formu:

$$f(y) = y^T \begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{k} & & \\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{z} & \\ & & \overbrace{0 \; \ddots \; 0}^{n} \end{pmatrix} y$$

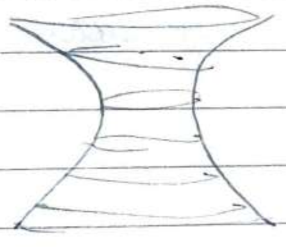
danú diagonálnou maticou s 1, -1, a 0 na diagonále, signatúra (k, z, n). Táto forma je určená **kanonicky** (jednoznačne) pôvodnou formou (vďaka signatúre (a Sylv. zákonu zotrvačnosti)). Zmena súradníc ale kanonická (jednoznačná) nie je.

Geometrický význam

Ak chceme zistiť aký typ plochy (resp. nadplochy) určuje kvadratická forma $f(x) = x^T A x = 1$, potrebujeme zistiť jej signatúru. Podľa toho sa zistí počet osí, ktoré sa s plochou pretínajú, resp. počet osí, ktoré sa jej vyhýbajú. elipsoid, hyperboloid a pod:



sign $(1,-1,-1)$



sign $(1,1,-1)$

Bilineárne formy

Videli sme dávnejšie, že norma (resp. jej druhá mocnina) a skalárny súčin spolu súvisia:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^T I x$$

Kvadratické formy boli vlastne akési zovšeobecnenia $\|x\|^2$.

Preto sa môžeme prirodzene pozrieť na funkciu:

$$\varphi(x,y) = y^T A x \qquad \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Takáto funkcia spĺňa podmienku bilinearity, je lineárna v oboch funkčných zložkách:

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \varphi(x_1, y) + \beta \varphi(x_2, y) \quad \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \varphi(x, y_1) + \beta \varphi(x, y_2) \quad \forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2$$

- Bilineárna forma $\varphi(x,y)$ je symetrická, ak spĺňa
$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$
teda: $y^T A x = x^T A y$.
Lenže ide o 1×1 matice, tak $(y^T A x) = (y^T A x)^T = x^T A^T y$.
Preto ~~matice~~ $A = A^T$ dá symetriu bilineárnej formy.

- Špeciálnym prípadom bilineárnych foriem $\underbrace{\text{sú}}_{V \times V \to \mathbb{R}}$ skalárne súčiny, ktoré spĺňajú:
  1) symetria $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
  2) bilinearita $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$
  3) kladná definitnosť $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

- čím sa dostávame k symetrickým kladne definitným maticiam...

A dalo by sa pokračovať...

- singulárny rozklad $A = U\Sigma V^T$
(pre obdĺžnikové matice)

- Raleyighov podiel $R = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$

- pseudoinverznú maticu A^+