

1. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňte si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.

a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.

c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D ?

2. (5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3 , spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.

b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice $A = S\Lambda S^{-1}$: Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$.

3. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.

4. Nájdite všetky ortogonálne 2×2 matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a -1 . Akú transformáciu roviny \mathbb{R}^2 reprezentujú?

5. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q , tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.

b) Overte, že $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry. Vysvetlite.

6. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti-Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

7. Nájdite dve normálne matice, ktorých súčin nebude normálna matica.

Pozn.: Toto znamená, že množina normálnych matíc nie je uzavretá vzhľadom na súčin. Je uzavretá vzhľadom na súčet?

8. (5.6.19) Predpokladajme, že T je 3×3 horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij} . Porovnaj zložky TT^H a $T^H T$ a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.

9. (5.R.5) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c ? Nájdite reálnu maticu A takú, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r .

10. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

11. (5.6.20) Ukážte, že ak je N normálna matica, potom $\|Nx\| = \|N^H x\|$ pre každý vektor x . Odvoďte z toho, že i -ty riadok matice N má rovnakú dĺžku ako i -ty stĺpec matice N .

Pozn.: Ak je N navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že N musí byť diagonálna (porovnaj s príkladom č. 8).

12. Nájdite 3×3 maticu, pre ktorú má nula ako vlastná hodnota algebraickú násobnosť 3 a geometrickú násobnosť 1.

13.* Na priestore (nekonečne veľa krát) diferencovateľných funkcií $C^\infty(\mathbb{R})$ predstavuje derivácia $\frac{d}{dx}$ lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú “vlastné funkcie” tejto transformácie, t.j. také $f(x)$, že $\frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x)$? Aké je spektrum $\frac{d}{dx}$?
Porovnajte s príkladom č. 1.

14.* Majme priestor $C^\infty((0, 2\pi))$ nekonečne veľa krát diferencovateľných funkcií, ktoré sú periodické s periódou 2π . Na tomto priestore predstavuje druhá derivácia $\frac{d^2}{dx^2}$ lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú “vlastné funkcie” tejto transformácie, t.j. také periodické $f(x)$, že $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lambda f(x)$? Aké je spektrum $\frac{d^2}{dx^2}$?