Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 3. apríl 2019

1. *(5 bodov)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.

b) Nájdite jej vlastné vektory a diagonalizáciu $A = S\Lambda S^{-1}$. Maticu S^{-1} nemusíte počítať, ale ak ju viete nájsť bez dlhého počítania, napíšte ju.

c) Vysvetlite prečo vyšli vlastné hodnoty tak, ako vyšli napr. s použitím hodnosti matice A, stopy A^2, nejakej jej špeciálnej vlastnosti a pod.

2. *(5 bodov)* Nech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a x je pravostranný vlastný vektor pre vlastnú hodnotu λ a y je ľavostranný vlastný vektor pre vlastnú hodnotu μ, t.j. $Ax = \lambda x$ a $y^H A = \mu y^H$.

a) Ukážte, že $\langle y, x\rangle = y^H x = 0$ pre $\lambda \neq \mu$.

b) Ukážte, že ak je A normálna, potom je x aj (pravým) vlastným vektorom matice A^H pre vlastnú hodnotu $\bar{\lambda}$.

c) Ukážte, že vlastné vektory prislúchajúce navzájom rôznym vlastným hodnotám normálnej matice sú (hermitovsky) ortogonálne.

3. *(4 body)* Pre maticu $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ nájdite diagonalizáciu $S\Lambda S^{-1}$ a vypočítajte $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ (výsledok nakoniec zjednodušte).

4. *(6 bodov)* a) Uveďte definíciu maticovej exponenciály e^A pre maticu $A_{n\times n}$.

b) Ukážte, že pre diagonalizovateľnú maticu $A_{n\times n}$ platí $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

c) Ukážte, že ak je matica A reálna antisymetrická, potom je e^A ortogonálna.