Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 7. máj 2019

1. *(5 bodov)* Nech:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite vlastné hodnoty matice A.

b) Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.

c) Nájdite Jordanov tvar matice A.

d) Nájdite maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(4 body)* Majme reálnu ortogonálnu 3×3 maticu A, pre ktorú $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Ukážte, že potom existuje $1 \leq n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $A^n = I$ (najmenšie také n sa nazýva *multiplikatívny rád* matice A). Nájdite všetky možné hodnoty rádu matice A a pre každý z nich aj príklad príslušnej (reálnej ortogonálnej) matice.
Návod: Ukážte, že A má reálnu vlastnú hodnotu.

3. *(5 bodov)* a) Zdôvodnite prečo by matica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mala spĺňať rovnicu $A^3 + A^2 - A = I$.

b) Napíšte A^{-1} ako lineárnu kombináciu matíc A^2, A a I (bez jej výpočtu).

c) Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{Z}$ (aj pre záporné) existujú koeficienty α_n, β_n a γ_n, pre ktoré

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I.$$

d) Ukážte, že pre zložky matice A^n na pozíciách $(1,1)$, $(2,2)$, resp. $(2,3)$ platí

$$(A^n)_{11} = 1, \qquad (A^n)_{22} = (-1)^n \qquad \text{a} \qquad (A^n)_{23} = n(-1)^{n-1}.$$

Odvoďte z toho systém troch lineárnych rovníc s trojicou neznámych $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ a ten následne vyriešte.

4. *(6 bodov)* (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.

a) Pre regulárnu $n \times n$ maticu A je $B = A^{-1}A^H$ unitárna práve vtedy, keď je A normálna.

b) Ak má A^4 vlastnú hodnotu μ, potom má A vlastnú hodnotu λ, pre ktorú $\lambda^4 = \mu$.

c) Ak B a C sú $n \times n$ matice a C je regulárna, potom $\chi_{BC}(\lambda) = \chi_{CB}(\lambda)$, t.j. charakteristické polynómy matíc BC a CB sú rovnaké.