Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 10

Pre týždeň 25. apríla 2022

---

1. Predpokladajme, že nenulové vektory $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ spĺňajú rovnosti $Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$ pre $i = 1, \ldots, k-1$ a $Ax_0 = \lambda x_0$, teda ide o reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastnú hodnotu λ. Ukážte, že $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sú lineárne nezávislé. Ukážte tiež, že $k \leq n$.

2. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J.)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar J.

3. (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice "nahliadnutím" - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru J pre maticu A s exponentami d_i vo faktorizácii minimálneho polynómu $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\ldots(x-\lambda_m)^{d_m}$? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice A?

5. (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar a pokúste sa nájsť aj maticu M z rovnosti $A = MJM^{-1}$. (v prípade nejasností pozrite Appendix B v knižke)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. (B.3) Pre maticu B z predchádzajúceho príkladu nájdite e^{Bt} ako $Me^{Jt}M^{-1}$ a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \cdots$.

7. (B.6) Pre maticu B (vlastné hodnoty 1, 1, 1 a -1) nájdite jej Jordanov tvar a aj maticu M z rovnosti $B = MJM^{-1}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (B.7) Predpokladajme, že matica A spĺňa rovnicu $A^2 = A$. Ukážte, že jej Jordanov tvar $J = M^{-1}AM$ tiež spĺňa $J^2 = J$. Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že $J_i^2 = J_i$ pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok J_i musí byť veľkosti 1×1 a $J_i = [\,0\,]$ alebo $J_i = [\,1\,]$. Inými slovami, A je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.

Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou A? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?