

*Definícia:* Hovoríme, že reálna symetrická matica  $A$  je kladne definitná, ak tzv. *kvadratická forma*  $f(x) = x^T Ax$  spĺňa  $f(x) \geq 0$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}^n$  a rovnosť nastáva len pre  $x = 0$ .

1. (6.1.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, a pre každú z nich rozložte kvadratickú formu  $f = x^T Ax$ :

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{d) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Determinant v časti b) je nulový; pozdĺž ktorej priamky bude forma  $f$  nulová?

2. (6.1.3) Ak  $2 \times 2$  matica  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  spĺňa podmienku  $a > 0$  a  $ac > b^2$ , nájdite vlastné hodnoty ako korene charakteristickej rovnice  $\det(A - \lambda I) = 0$  a ukážte, že sú obe kladné.

Pripomenutie faktu: ak pre symetrickú maticu ( $A^T = A$ ) spravíme  $LDU$  rozklad bez výmeny riadkov, v skutočnosti dostaneme rozklad  $A = LDL^T$ . Použite v nasledujúcich príkladoch.

3. (6.1.5) a) Pre aké hodnoty parametra  $b$  je matica  $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{bmatrix}$  kladne definitná?

b) Nájdite faktorizáciu  $A = LDL^T$  pre  $b$  z intervalu kladnej definitnosti.

c) Nájdite minimálnu hodnotu výrazu  $\frac{1}{2}(x^2 + 2bx + 9y^2) - y$  pre  $b$  z tohto intervalu.

d) Aké je minimum pre  $b = 3$ ?

4. (6.1.7) a) Nájdite  $3 \times 3$  matice  $A_1, A_2$  zodpovedajúce kvadratickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma  $f_1$  sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je  $f_1$  rovná nule?

c) Nájdite rozklad  $A_2$  ako  $LL^T$  ( $L$  je dolná trojuholníková matica). Vyjadrite  $f_2$  ako súčet troch štvorcov.

5. (6.1.9) Kvadratická forma  $f = 3(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2$  je kladne definitná. Nájdite jej maticu  $A$ , rozložte ju ako  $LDL^T$  a vysvetlite súvislosť zložiek matíc  $D$  a  $L$  s pôvodným tvarom formy  $f$ .

6. (6.2.1) Pre aké hodnoty parametra  $a$  je matica  $A$  kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

7. (6.2.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

8. (6.2.4) S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica  $A$  kladne definitná, potom sú aj matice  $A^2$  a  $A^{-1}$  kladne definitné.

9. (6.2.5) Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  kladne definitné, potom je takou aj matica  $A + B$ . Ktoré z kritérií kladnej definitnosti I – IV sa hodí v tomto prípade?

10. (6.2.6) Použitím pivotov, vlastných hodnôt a vlastných vektorov matice  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  zapíšte  $A$  v tvare  $R^T R$  všetkými tromi spôsobmi z prednášky –  $(LD^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}L^T)$ ,  $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$ , a  $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$ .

**11.** (6.2.8) Ak je matica  $A$  symetrická a kladne definitná a  $C$  je regulárna, ukážte, že matica  $B = C^T AC$  je tiež symetrická a kladne definitná.

**12.** (6.2.10) Elipsa  $u^2 + 4v^2 = 1$  zodpovedá matici  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ . Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice  $A$  a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu  $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$  (pozri príklad č. 10).

**13.** (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$  reprezentuje elipsoid pokiaľ sú všetky  $\lambda_i$  kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

**14.** (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby  $3 \times 3$  matica  $A$  bola *záporne definitná* (matica  $-A$  je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu  $\det A$  a  $\det(-A)$ .

**15.** (6.2.16) *Pravda/Nepravda* Ak je matica  $A$  symetrická kladne definitná a  $Q$  je ortogonálna, potom:

- a)  $Q^T A Q$  je diagonálna matica,
- b)  $Q^T A Q$  je symetrická kladne definitná matica,
- c)  $Q^T A Q$  má rovnaké vlastné hodnoty ako  $A$ ,
- d)  $e^{-A}$  je symetrická kladne definitná matica.

**16.** (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (hodnosť 2)} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (hodnosť 1)}$$

vyjadrite  $x^T A x$  ako súčet dvoch štvorcov a  $x^T B x$  ako jeden štvorec.

**17.** (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$