

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 1. apríl 2021

1. (4 body) Majme maticu A :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.
- b) Nájdite jej vlastné vektory a diagonalizáciu $A = S\Lambda S^{-1}$. Maticu S^{-1} nemusíte počítať.

2. (5 bodov) Pre maticu $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nájdite diagonalizáciu $S\Lambda S^{-1}$ a vypočítajte $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$.
Výsledok zjednodušte tak, aby zložky výslednej matice e^{At} obsahovali reálne funkcie premennej t .
Dokážte, že e^{At} bude pre ľubovoľné t ortogonálna matica.

3. (5 bodov) a) Nech u je vektor jednotkovej dĺžky v \mathbb{C}^n . Ukážte, že $n \times n$ matica $H = I - 2uu^H$ je unitárna aj Hermitovská zároveň.

- b) Aké môžu byť vlastné hodnoty matice H ?
- c) Pomocou stopy matice H nájdite násobnosti jej jednotlivých vlastných hodnôt.
- d) Ako vyzerajú jej vlastné podpriestory (t.j. priestory tvorené vlastnými vektormi)?

4. (6 bodov) (pravda/nepravda) So zdôvodnením, resp. príkladom alebo protipríkladom.

- a) Matice A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty.
- b) Matice A a A^T majú rovnaké vlastné vektory.
- c) Matica typu $n \times n$ s charakteristickým polynómom $\chi(\lambda) = \lambda^n + 1$ je regulárna.
- d) Neexistuje 4×4 reálna antisymetrická matica s charakteristickým polynómom $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 1$.