

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 6. máj 2021

1. (5 bodov) Nech:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Nájdite vlastné hodnoty matice A .
 - b) Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.
 - c) Nájdite Jordanov tvar matice A .
 - d) Nájdite matice M a M^{-1} z rozkladu $A = MJM^{-1}$.
 - e) Vypočítajte A^{100} .
2. (4 body) Nech A je matica typu $n \times n$, a, b dve navzájom rôzne komplexné čísla a matica A spĺňa rovnosť $A^2 - (a + b)A + abI = 0$.
- a) Ukážte, že čísla a a b sú jediné možné vlastné hodnoty, ktoré matica A môže mať.
 - b) Dokážte platnosť vzťahu $\mathcal{N}(A - aI) = \mathcal{S}(A - bI)$.
 - c) Je matica A diagonalizovateľná? Je unitárne diagonalizovateľná? Zdôvodnite.
3. (5 bodov) Majme matice A, B typu $n \times n$ spĺňajúce rovnosť $AB - BA = 2B$.
- a) Nájdite stopu matice B .
 - b) Dokážte, že pre každé $m \in \mathbb{N}$ platí $AB^m - B^m A = (2m)B^m$.
 - c) Ukážte, že pre vlastný vektor x matice A existuje $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré $x \in \mathcal{N}(B^k)$.
4. (6 bodov) (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.
- a) Hviezdičky v matici A sa nedajú doplniť tak, aby A a B boli podobné: $A = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 2 & * \\ * & * & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
 - b) Všetky 5×5 matice N spĺňajúce $N^4 = 0$ ale $N^3 \neq 0$ sú podobné.
 - c) Ak J je Jordanov blok veľkosti $n \times n$ pre vlastnú hodnotu λ , potom Jordanov tvar matice J^T je J .
 - d) Ak A je ľubovoľná (reálna) ortogonálna matica, potom existuje matica B taká, že $e^B = A$.