Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie II., 31. mája 2021

1. *(6 bodov)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický a minimálny polynóm matice A.
b) Nájdite jej vlastné vektory, Jordanov tvar a rozklad $A = MJM^{-1}$.

2. *(6 bodov)* Nech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ spĺňajú $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. Označme $n \times n$ maticu

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \dots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \dots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \dots & a_n^2+1 \end{bmatrix}.$$

a) Ukážte, že $A = BB^T$ pre nejakú maticu B typu $n \times 2$.
b) Ukážte, že matica A je kladne semidefinitná.
c) Nájdite vlastné hodnoty matice A a zodpovedajúce vlastné vektory.
d) Ako súvisia štyri základné podpriestory $\mathcal{S}(B)$, $\mathcal{S}(B^T)$, $\mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(B^T)$ s vlastnými vektormi matice A?

3. *(5 bodov)* Nech $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineárna transformácia, ktorá spĺňa:

$$\alpha((1,0,-1,2)^T) = (2,0,-2,4)^T, \quad \alpha((0,1,1,1)^T) = (0,-5,-5,-5)^T, \quad \alpha((1,2,-1,0)^T) = (2,4,-2,0)^T;$$

$$(2,2,-2,2)^T \text{ a } (1,0,0,0)^T \text{ sú vlastné vektory } \alpha;$$

$$\det \alpha = 100.$$

a) Nájdite vlastné hodnoty α spolu s násobnosťami a príslušnými vlastnými vektormi.
b) Existuje báza $\mathbb{R}^4$ zložená z vlastných vektorov transformácie α?
c) Nájdite $\mathrm{Tr}(\alpha)$ a jej maticu vzhľadom na štandardnú bázu.

4. *(5 bodov)* a) Načrtnite obrázok krivky danej rovnicou $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$.
b) Ak je krivka symetrická podľa nejakých osí, nájdite ich rovnice. Ak sa krivka asymptoticky blíži k nejakým priamkam, nájdite ich rovnice.
c) Nájdite súradnice bodov na krivke, ktoré sú najbližšie k počiatku, jej vrcholy.
d) Do toho istého obrázku načrtnite aj obrázok krivky $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = -1$.

5. *(12 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením (príkladom) v pravdivom prípade a protipríkladom (zdôvodnením) v nepravdivom:
a) Pre reálnu symetrickú maticu sa minimálny a charakteristický polynóm rovnajú.
b) Pre unitárnu maticu U platí $\det U = \pm 1$.
c) Ak majú oba stĺpce aj oba riadky 2×2 matice dĺžku 1, potom je diagonalizovateľná.
d) Nech $v = (1,2)^T$ a $w = (1,-1)^T$. Potom existuje hermitovská matica $A \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ spĺňajúca $Av = 2v$ a $Aw = 4w$.
e) Nech $v = (1,1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje antisymetrická matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ spĺňajúca $Av = v$.
f) Ak $A^2 = A$, potom je A diagonalizovateľná.

6. *(6 bodov)* Nech reálna $n \times n$ matica A spĺňa rovnosť $(A - I)^{-1} = A^{-1} - I$.
a) Aký môže byť jej minimálny polynóm? Vlastné hodnoty? Zdôvodnite.
b) Čomu sa môže rovnať A^3?
c) Nájdite 2×2 maticu $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ s celočíselnými zložkami, ktorá bude spĺňať takúto rovnicu.
(*Návod*: stopa, determinant)