

1. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu  $a + bx + cx^2 + dx^3$  stupňa 3 má tvar  $b + 2cx + 3dx^2$ . Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.

a) Nájdite maticu  $D$  zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte  $D^4$  a vysvetlite výsledok v reči derivácií.

c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice  $D$ ?

2. (5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme  $3 \times 3$ , spĺňa svoju charakteristickú rovnicu:  $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$ .

b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice  $A = S\Lambda S^{-1}$ : Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice:  $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$ .

3. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice  $A$  spĺňajúcej  $A^2 = -I$ ? Ak  $A$  je taká reálna  $n \times n$  matica, ukážte, že potom  $n$  musí byť párne. Uveďte príklad.

4. Nájdite všetky ortogonálne  $2 \times 2$  matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a  $-1$ . Akú transformáciu roviny  $\mathbb{R}^2$  reprezentujú?

5. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu  $Q$ , tak aby platilo  $Q^{-1}AQ = \Lambda$  pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov  $x_1, x_2$  pre  $\lambda = 0$ .

b) Overte, že  $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$  je rovnaká matica pre oba páry. Vysvetlite.

6. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti-Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

7. Nájdite dve normálne matice, ktorých súčin nebude normálna matica.

*Pozn.:* Toto znamená, že množina normálnych matíc nie je uzavretá vzhľadom na súčin. Je uzavretá vzhľadom na súčet?

8. (5.6.19) Predpokladajme, že  $T$  je  $3 \times 3$  horná trojuholníková matica, jej zložky označme  $t_{ij}$ . Porovnaj zložky  $TT^H$  a  $T^H T$  a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť  $T$  diagonálna.

9. (5.R.5) Existuje matica  $A$  taká, že matice typu  $A + cI$  sú invertibilné pre všetky komplexné čísla  $c$ ? Nájdite reálnu maticu  $A$  takú, že  $A + rI$  bude invertibilná pre všetky reálne  $r$ .

10. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica  $B$  invertibilná, potom sú matice  $AB$  a  $BA$  podobné.

11. (5.6.20) Ukážte, že ak je  $N$  normálna matica, potom  $\|Nx\| = \|N^H x\|$  pre každý vektor  $x$ . Odvoďte z toho, že  $i$ -ty riadok matice  $N$  má rovnakú dĺžku ako  $i$ -ty stĺpec matice  $N$ .

*Pozn.:* Ak je  $N$  navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že  $N$  musí byť diagonálna (porovnaj s príkladom č. 8).

12. Nájdite  $3 \times 3$  maticu, pre ktorú má nula ako vlastná hodnota algebraickú násobnosť 3 a geometrickú násobnosť 1.

**13.\*** Na priestore (nekonečne veľa krát) diferencovateľných funkcií  $C^\infty(\mathbb{R})$  predstavuje derivácia  $\frac{d}{dx}$  lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú “vlastné funkcie” tejto transformácie, t.j. také  $f(x)$ , že  $\frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x)$ ? Aké je spektrum  $\frac{d}{dx}$ ?  
Porovnajte s príkladom č. 1.

**14.\*** Majme priestor  $C^\infty((0, 2\pi))$  nekonečne veľa krát diferencovateľných funkcií, ktoré sú periodické s periódou  $2\pi$ . Na tomto priestore predstavuje druhá derivácia  $\frac{d^2}{dx^2}$  lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú “vlastné funkcie” tejto transformácie, t.j. také periodické  $f(x)$ , že  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lambda f(x)$ ? Aké je spektrum  $\frac{d^2}{dx^2}$ ?