

1. (5.6.3) Vysvetlite, prečo matica  $A$  nemôže byť nikdy podobná matici  $A + I$ .

2. (5.6.4) Nájdite diagonálnu maticu  $M$ , ktorej zložky sú 1 a  $-1$ , tak aby matica  $M$  bola maticou podobnosti pre  $A$  a  $B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (5.6.2) Opíšte slovne všetky matice, ktoré sú podobné matici  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  a nájdite zopár príkladov. Ako by sa zmenila situácia, ak by sme sa zaujímali o ortogonálnu podobnosť?

4. (5.6.6) a) Ak  $CD = -DC$  a  $D$  je invertibilná, ukážte, že potom je  $C$  podobná  $-C$ .

b) Odvoďte z toho, že vlastné hodnoty matice  $C$  musia existovať v pároch s opačnými znamienkami.

c) Ukážte priamym výpočtom, že ak  $Cx = \lambda x$ , potom  $C(Dx) = -\lambda(Dx)$ .

5. (5.6.8 a 9) Aká matica zodpovedá zmene báz z  $v_1 = (1, 1)$  a  $v_2 = (1, 4)$  na  $w_1 = (2, 5)$  a  $w_2 = (1, 4)$ ? Stĺpce matice  $M$  dostaneme tak, že vyjadríme  $v_1$  a  $v_2$  ako kombináciu  $w_1$  a  $w_2$ .

Vyjadrite vektor  $(3, 9)$  ako kombináciu  $c_1v_1 + c_2v_2$ , aj ako kombináciu  $d_1w_1 + d_2w_2$ . Overte, že matica  $M$  naozaj prevádza  $c$  na  $d$ :  $Mc = d$ .

6. (5.6.23) Ak má  $3 \times 3$  matica  $A$  vlastné hodnoty  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a  $\lambda_3$ , čo budú vlastné hodnoty matice  $(A - \lambda_3I)(A - \lambda_2I)(A - \lambda_1I)$ ? Čo to bude za matica?

7. (5.6.27) Majme maticu  $A$ , pre ktorú  $a_{ij} = 1$  pre zložky nad hlavnou diagonálou ( $i < j$ ) a  $a_{ij} = 0$  pre všetky ostatné ( $i \geq j$ ). Nájdite jej vlastné vektory (napr. pre prípad  $4 \times 4$ ), ako aj vektory spĺňajúce rovnice typu  $Ax_{i+1} = x_i$ , kde  $x_1$  je vlastný vektor.

8. (5.R.3.4) Ak má matica  $A$  vlastné hodnoty 0 a 1, zodpovedajúce vlastným vektorom  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , prečo sa dá vopred, bez jej výpočtu, povedať že bude symetrická? Ako bude  $A$  vyzeráť?

Aké budú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice  $A^2$ ? Aký je vzťah medzi  $A$  a  $A^2$ ?

9. (5.R.25) a) Nájdite nenulovú maticu  $N$ , takú aby  $N^3 = 0$ .

b) Ukážte, že ak  $Nx = \lambda x$ , potom  $\lambda$  musí byť nula.

c) Dokážte, že  $N$  (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

10. Nech  $A$  je nilpotentná matica (t.j.  $A^k = 0$  pre nejaké  $k$ ). Ukážte, že  $\det(A + I) = 1$ .

11. Dokážte alebo vyvráťte: matica  $A$  typu  $n \times n$  je antisymetrická práve vtedy, keď  $x^T Ax = 0$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}^n$ .

12. Nech  $A$  je reálna symetrická matica, t.j.  $A^T = A$ . Ukážte, že ak  $x \in \mathbb{C}^n$  je jej *komplexný* vlastný vektor, potom aj  $\bar{x}$  je vlastný vektor matice  $A$ . Overte, že  $x + \bar{x}$  bude patriť do  $\mathbb{R}^n$ . Za akých podmienok pôjde o *reálny* vlastný vektor matice  $A$ ?

13. Nech  $K$  je reálna antisymetrická matica, t.j.  $K^T = -K$ . Ukážte, že ak  $x \in \mathbb{C}^n$  je jej *komplexný* vlastný vektor pre vlastnú hodnotu  $i\lambda$ , potom aj  $\bar{x}$  je vlastný vektor matice  $K$ . Overte, že  $x + \bar{x}$  a  $i(x - \bar{x})$  budú patriť do  $\mathbb{R}^n$ .

Ukážte, že  $K(x + \bar{x}) = \lambda i(x - \bar{x})$  a  $Ki(x - \bar{x}) = -\lambda(x + \bar{x})$ .

Odvoďte z toho, že reálna antisymetrická matica  $K$  bude podobná (nad  $\mathbb{R}$ ) tzv. blokovo diagonálnej matici s blokmi tvaru  $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$ . Sú vektory  $x + \bar{x}$  a  $i(x - \bar{x})$  na seba kolmé? Sú oba nenulové?