Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 30. marec 2022

1. *(4 body)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.

b) Dajú sa pre A nájsť vlastné vektory, ktoré budú ortonormálne? Ak áno, nájdite ich a vysvetlite ako to súvisí s nejakou jej špeciálnou vlastnosťou.

c) Nájdite diagonalizáciu $A = S\Lambda S^{-1}$.

2. *(5 bodov)* Uvažujme funkciu reálnej premennej

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

Pomocou metód lineárnej algebry nájdite rozvoj funkcie f do mocninového radu, t.j. nájdite postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, aby pre dostatočne malé x platilo

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

Nájdite diferenčnú rovnicu, ktorú musia spĺňať členy postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, nájdite počiatočné podmienky, ktoré musia spĺňať členy a_0 a a_1. Nájdite riešenie príslušnej diferenčnej rovnice, t.j. explicitný tvar pre člen a_n. Riešenie nech obsahuje iba reálne funkcie v premennej n.

3. *(5 bodov)* Uvažujme blokovú maticu $M \in M_{m+n,m+n}(\mathbb{C})$ v tvare

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A_{m\times m} & B_{m\times n} \\ \hline 0_{n\times m} & C_{n\times n} \end{array}\right).$$

a) Ukážte, že λ je vlastná hodnota matice M práve vtedy, keď λ je vlastná hodnota matice A alebo matice C.

b) Nájdite podmienky, ktoré musia spĺňať vektory $x \in \mathbb{C}^m$ a $y \in \mathbb{C}^n$, aby vektor $\left(\frac{x}{y}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$ bol vlastný vektor matice M.

c) Ukážte, že ak M je diagonalizovateľná, potom sú diagonalizovateľné aj matice A a C. Platí aj opačná implikácia? Dokážte alebo nájdite protipríklad.

4. *(6 bodov)* (pravda/nepravda) So zdôvodnením, resp. príkladom alebo protipríkladom.

a) Súčet dvoch diagonalizovateľných matíc je diagonalizovateľná matica.

b) Každý vlastný vektor matice A prislúchajúci nenulovej vlastnej hodnote patrí do $\mathcal{S}(A)$.

c) Ak je horná trojuholníková matica diagonalizovateľná, tak je diagonálna.

d) Vlastné hodnoty projekčnej matice sú nezáporné.