

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 4. máj 2022

1. (5 bodov) Nech:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- Nájdite charakteristický polynóm a vlastné hodnoty matice A .
 - Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.
 - Nájdite minimálny polynóm a Jordanov tvar matice A .
 - Nájdite matice M a M^{-1} z rozkladu $A = MJM^{-1}$.
2. (5 bodov) Nech $u, v \in \mathbb{R}^n$ sú navzájom kolmé nenulové vektory a $A = uu^T - vv^T$.
- Nájdite $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a hodnotu matice A .
 - Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A spolu s ich algebraickými a geometrickými násobnosťami.
 - Je matica A diagonalizovateľná? Čo všetko sa dá povedať o vlastných hodnotách a vlastných vektoroch matice A bez toho, aby sme ich počítali?
3. (4 body) Nech $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$.
- Bez počítania nájdite jej najväčšiu vlastnú hodnotu, zdôvodnite.
 - Ak $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ a $u_{k+1} = Au_k$, čo bude $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k$?
 - Ako by vyšla podobná limita pre $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$? Prečo?
4. (6 bodov) (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.
- Všetky 4×4 matice s vlastnými hodnotami 1, 2, 3 a 4 sú podobné.
 - Rozdiel $A - B$ dvoch podobných matíc A, B je singularná matica.
 - Minimálny a charakteristický polynóm sa pre regulárnu maticu rovnajú.
 - Permutačná matica je diagonalizovateľná.