Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie II., 31. mája 2022

1. *(6 bodov)* Nech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický a minimálny polynóm matice A.
b) Nájdite jej vlastné vektory, Jordanov tvar a maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(5 bodov)* Nech A_n je $n \times n$ matica daná predpisom

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} i & i \leq j, \\ j & i > j. \end{cases}$$

Nájdite signatúru kvadratickej formy $f(x) = x^T A_n x$ v $\mathbb{R}^n$ a upravte ju na úplné štvorce.

3. *(6 bodov)* Nech $\mathcal{P}_5$ je priestor (reálnych) polynómov stupňa nanajvýš 5. Uvažujme zobrazenie $T : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ dané predpisom:

$$T(p)(x) = p(x+1) - p(x).$$

a) Nájdite maticu zobrazenia T vzhľadom na bázu $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$.
b) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a Jordanov tvar zobrazenia T.

4. *(5 bodov)* Nech A a X sú $n \times n$ komplexné matice a λ je dané komplexné číslo, pričom platí $AX - \lambda XA = 0$. Ukážte, že ak A je regulárna, potom $|\lambda| = 1$ alebo X je nilpotentná.

5. *(12 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením (príkladom) v pravdivom prípade a protipríkladom (zdôvodnením) v nepravdivom:
a) Ak λ je vlastnou hodnotou matice A, potom λ^2 je vlastnou hodnotou A^2.
b) Ak μ je vlastnou hodnotou matice A^2, potom existuje vlastná hodnota λ matice A, spĺňajúca $\lambda^2 = \mu$.
c) Regulárna matica A a jej adjungovaná matica $\mathrm{Adj}(A)$ majú rovnaké vlastné vektory.
d) Ak je matica A kladne definitná, potom je kladne definitná aj $\frac{A+A^{-1}}{2}$.
e) Matice AB a BA majú rovnaký minimálny polynóm.
f) Pre normálnu $n \times n$ maticu C platí $\|Cx\| = 0$ práve vtedy, keď $\|C^H x\| = 0$.

6. *(6 bodov)* Nech $\alpha : V \to V$ je lineárne zobrazenie (konečnorozmerného) vektorového priestoru V samého do seba. Predpokladajme, že platí $\ker(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha)$.
a) Ukážte, že dimenzia V je párna.
b) Nájdite minimálny polynóm a Jordanov tvar pre zobrazenie α.