

1. (5.3.4) Biológ H. Bernadelli (1941) študoval tzv. populačné vlny a ako model opísal chrobáka, "ktorý žije tri roky a rozmnožuje sa v treťom roku života". Ak chrobák prežije prvý rok s pravdepodobnosťou  $\frac{1}{2}$ , druhý s pravdepodobnosťou  $\frac{1}{3}$  a v treťom roku splodí šesť samičiek, matica opisujúca medziročnú zmenu populácie bude

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že  $A^3 = I$  a sledujte populáciu chrobákov po dobu šesť rokov začínajúc v prvom roku s 3000 chrobákmi v každej vekovej skupine.

2. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

3. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty  $y_k$  a  $z_k$  pre  $k \rightarrow \infty$  ak

$$y_{k+1} = 0.8y_k + 0.3z_k \quad y_0 = 0$$

$$z_{k+1} = 0.2y_k + 0.7z_k \quad z_0 = 5.$$

Tiež nájdite formuly pre  $y_k$  a  $z_k$  použijúc  $A^k = SA^kS^{-1}$ .

4. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Stahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fiľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fiľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte  $3 \times 3$  maticu prechodu  $A$  a nájdite stály stav  $u_\infty$  zodpovedajúci vlastnej hodnote  $\lambda = 1$ .

5. (5.3.12) Ak  $A$  je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora  $Ax$  sa rovná súčtu zložiek vektora  $x$ . Odvodte z toho, že ak  $Ax = \lambda x$  pre  $\lambda \neq 1$ , potom súčet zložiek vlastného vektora  $x$  je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

6. Ak  $A$  je Markovovská matica, ukážte, že vektor  $(1, 1, \dots, 1)^T$  je vlastný vektor matice  $A^T$  pre  $\lambda = 1$ . Keďže vieme, že matice  $A$  a  $A^T$  majú rovnaké vlastné hodnoty, toto je alternatívny dôkaz toho, že jednotka je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice.

7. (5.R.7) Čo by ste uprednostnili – 50%-ný úrok (p.a) pripisovaný raz ročne, 44%-ný úrok (p.a) pripisovaný štvrťročne alebo 42%-né (p.a) spojitý úročené?

8. Každá permutačná matica necháva vektor  $x = (1, 1, \dots, 1)^T$  nezmenený. Preto jedna z jej vlastných hodnôt je  $\lambda = 1$ . Nájdite zvyšné vlastné hodnoty pre permutačné matice:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi  $(1, 1, 1)^T$  (resp.  $(1, 1, 1, 1)^T$ )?

9. Pre maticu rotácie  $Q$  riešte charakteristickú rovnicu  $\det(Q - \lambda I) = 0$  pomocou vzorca na korene kvadratickej rovnice a presvedčte sa, že  $\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matica  $Q$  reprezentuje rotáciu  $\mathbb{R}^2$  o uhol  $\theta$ . Nájdite tiež vlastné vektory matice  $Q$  riešením (komplexnej) lineárnej rovnice  $(Q - \lambda I)x = 0$ .

10. Existuje reálna  $2 \times 2$  matica, rôzna od  $I$ , ktorá spĺňa  $A^3 = I$ ? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať  $\lambda^3 = 1$ , čo spĺňajú okrem jednotky práve čísla  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  a  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Akú stopu a determinant by teda mala matica  $A$  mať? Nájdite  $A$ .

11. (príklad zo života, na percentá) Pri výstavbe diaľnice D1 (severná časť) sa mali použiť tzv. PPP projekty, ktoré sa nakoniec zrušili, potom sa opäť uvažovalo o ich použití pri výstavbe iných úsekov, a opäť sa nerealizovali. V uplynulých rokoch sa znovu použili pri výstavbe diaľnice D4/R7 – obchvatu Bratislavy. Prebehla verejná súťaž, v roku 2016 boli oznámené jej výsledky, následne sa podpísala zmluva, vykúpili sa pozemky za premrštené ceny, začalo sa s výstavbou, ktorá následne utíchla kvôli problémom so subdodávateľmi, opäť sa rozbehla, prišlo sa na problémy s kontaminovanými násypmi a napojením na D1, časť úsekov sa otvorila v priebehu roku 2020, zvyšok v roku 2021. Napojenie na D1 stále chýba, možno sa podarí dokončiť v roku 2025 ...

Na úsek Hričovské Podhradie – Dubná Skala (dĺžka 24,8 km + privádzač v dĺžke 4,25 km), ktorý v sebe zahŕňa aj obojsmerné tunely Ovčiarско (cca. 2360 m), Žilina (cca. 690 m) a Višňové (cca. 7520 m) predstavovala v roku 2009 dohodnutá cena za stavebné práce 1,94 mld. Eur a následné splátky sa odhadovali na celkovú výšku 8,545 mld. Eur. Táto suma v sebe mala zahŕňať aj údržbu, prevádzku a rekonštrukciu počas najbližších 30 rokov.

V decembri roku 2013 bola uzavretá nová dohoda o výstavbe úseku Hričovské Podhradie – Lietavská Lúčka v dĺžke 11,3 km za 427,2 mil. Eur bez DPH. Zmluva pre úsek Lietavská Lúčka – Dubná skala (13,51 km) s dátumom dokončenia december 2019 bola podpísaná v júni 2014 v hodnote 409,8 mil. Eur bez DPH, pričom ponuka firmám Skanska a Strabag vo výške 338,29 mil. Eur bez DPH bola zo súťaže z pomerne obskúrnych dôvodov vylúčená. Koncom roka 2018 začala výstavba tunela Višňové viaznuť a v roku 2019 bola zmluva s konzorcium Salini Impreglio – Dúha zo strany NDS vypovedaná. Za dovtedy vykonané práce sa uhradilo okolo 190 mil. EUR. V roku 2020 prebehla súťaž na dokončenie rozostavaného tunela, začiatkom februára 2021 ohlásili jej víťaza – firmu Skanska so zmluvou vo výške 254,83 mil. Eur bez DPH a termínom dokončenia koncom roka 2023. V priebehu roka 2021 sa zistili vážne nedostatky v betonáži a potrubiach na odvodnenie, dodatočné práce spôsobia ďalší nárast ceny a predĺženie výstavby minimálne do septembra 2024. Počas roka 2023 sa problematickým ukázal tender na dodávku technológií v odhadovanej hodnote 71,5 mil. Eur bez DPH. Nakoniec bola v októbri 2023 uzavretá zmluva na dodávku technológií za 54,4 mil. Eur bez DPH so spoločnosťou PPA CONTROLL. Realistickým termínom otvorenia tunela je nateraz jar 2025.

So začiatkom výstavby privádzača Lietavská Lúčka – Žilina (7,28 km, predĺžené oproti pôvodnému plánu) sa počítalo v roku 2016, ale NDS nezvládla uskutočniť výberové konanie na zhotoviteľa včas. Zmluva s Metrostavom bola nakoniec podpísaná v decembri 2017 v hodnote 13,9 mil. Eur bez DPH za (opätovne skrátený) úsek v dĺžke 2,59 km, ktorý bol odovzdaný do užívania v januári 2021.

a) Odvodte vzorec pre výpočet celkovej výšky splátok hypotéky v trvaní 30 rokov pri fixnej úrokovej miere  $p$ . Pre jednoduchosť počítajte s jednou splátkou ročne, pred zaplatením ktorej sa zostávajúca dlžná suma prenásobí  $(1 + p)$ .

b) Odhadnite predraženie PPP projektov na D1 voči financovaniu priamo zo štátneho rozpočtu, resp. eurofondov. Vychádzajte z týchto parametrov z roku 2008:  $p_{sr} = 4,2\%$ ,  $p_{ppp} = 7,45\%$ .

c) Odhadnite predraženie výstavby diaľničných tunelov v pôvodnom návrhu PPP z porovnania s výstavbou úsekov v Rakúsku (napr. A14 Rheintal Autobahn, Pfänderertunnel – 6,7 km za 212 mil. Eur, A9 Pyhrn Autobahn, Bosrucktunnel – 7,3 km za 282 mil. Eur a pod.), porovnajte s cenami z rokov 2013 a 2014 po zohľadnení inflácie.

d) Koľko bankových úradníkov by bolo možné počas najbližších 30 rokov zamestnať z rozdielu finančných nákladov medzi  $p_{sr}$  a  $p_{ppp}$ ? (uvažujte plat vo výške štvornásobku priemernej mzdy, nezabudnite na odvody, odhadnite nárast priemernej mzdy do budúcnosti).

e) Ako by vyšli podobné výpočty pre realizovaný PPP projekt v prípade diaľničného obchvatu D4 a R7 okolo Bratislavy? Porovnajzte svoje odhady so štúdiou Inštitútu finančnej politiky MF SR [http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/LA/Stanovisko\\_D4R7.pdf](http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/LA/Stanovisko_D4R7.pdf) <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Zdroje:

<http://old.silnice-zeleznice.cz/clanek/dialnica-d1-hricovske-podhradie-dubna-skala-ako-iii-balik-ppp/>  
<http://zilina.sme.sk/c/5226839/zacali-vystavbu-najnarocnejšieho-useku-dialnice-d1.html>  
<http://www.asfinag.at/unterwegs/bauen>  
<http://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/302074-usek-d1-pri-ziline-postavi-zdruzenie-vedene-doprastavom/>  
<http://www.ndsas.sk/stavby/vystavba>  
<http://www.uvo.gov.sk/vyhľadavanie-zakaziek/detail/124949>  
<http://www.uvo.gov.sk/vyhľadavanie-zakaziek/detail/110430>  
<http://www.etrend.sk/ekonomika/skanska-a-strabag-su-blizko-k-stavbe-tunela-visnove.html>  
<http://www.pluska.sk/spravy/ekonomika/nekonencny-suboj-stavbu-tunela-visnove-firmy-skanska-strabag-vratili-do-sutaze.html>  
<https://dennikn.sk/blog/k-dialnici-pri-ziline-neobstarali-privadzac-docasne-skonci-v-poli/>  
<https://www.uvo.gov.sk/vyhľadavanie-zakaziek/detail/407710>  
<http://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/393655-podpisali-zmluvu-o-obchvate-bratislavy-stavba-mozno-zacne-na-jesen/>  
<https://www.uvo.gov.sk/vyhľadavanie-zakaziek/detail/148169>  
<https://dennikn.sk/133030/rozbehol-sa-reality-obchod-roka-stat-draho-vykupuje-podu-pod-dialnicu-pri-bratislave/>  
<https://www.mfsr.sk/sk/financie/institut-financnej-politiky/publikacie-ifp/ekonomicke-analyzy/35-stanovisko-ministerstva-financii-sr-k-projektu-vystavby-d4-r7.html>  
<https://www.etrend.sk/ekonomika/nds-vypise-novu-sutaz-na-zhotovitelu-useku-d1-s-tunelom-visnove.html>  
<https://www.transport.sk/spravy-cestna-infrastruktura/11515-sutazne-podklady-na-sutaz-d1-s-tunelom-visnove-su-znova-na-kon.html>  
<https://ekonomika.pravda.sk/ludia/clanok/576760-minister-dolezal-tunel-visnove-sa-ide-stavat-v-tendri-zvitazila-skanska/>  
<https://auto.pravda.sk/doprava/clanok/576190-spusta-sa-usek-hricovske-podhradie-lietavska-lucka-od-dnes-je-dialnica-d1-dlh>  
<https://ekonomika.sme.sk/c/22807100/cena-za-tunel-visnove-uz-vzrastla-a-zvysi-sa-este-viac.html>  
<https://auto.pravda.sk/doprava/clanok/657252-problematicky-tunel-visnove-hrozi-dalsie-predlzenie-stavby/>  
<https://www.visnovebude.sk/>  
<https://www.crz.gov.sk/zmluva/8387876/>  
<https://myzilina.sme.sk/c/23228219/cez-tunel-visnove-prejdeme-na-jar-v-roku-2025.html>