

1. Nech  $V$  je vektorový priestor nad poľom  $\mathbb{C}$  dimenzie  $n$ . Ukážte, že  $V$  je  $2n$ -rozmerný reálny vektorový priestor.

2. Komplexná  $n \times n$  matica sa nazýva *hermitovská*, ak pre všetky  $i, j$  platí  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ . Ukážte, že hermitovské matice tvoria reálny vektorový podpriestor v priestore komplexných matíc  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ , nájdite jeho bázu a určite jeho dimenziu. Ukážte tiež, že hermitovské matice netvoria komplexný vektorový podpriestor v  $M_{n,n}(\mathbb{C})$ .

3. (5.5.2) Čo sa dá povedať o:

- i) súčte komplexného čísla s číslom s ním združeným?
- ii) komplexnom združení čísla na jednotkovej kružnici?
- iii) súčine dvoch čísel z jednotkovej kružnice?
- iv) súčte dvoch čísel z jednotkovej kružnice?

4. (5.5.4) Nájdite hodnoty  $a$  a  $b$  pre komplexné čísla  $a + ib$  na jednotkovej kružnici, ktorých argument zodpovedá uhlom  $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Overte, že druhá mocnina prvého z nich sa rovná druhému a jeho tretia mocnina tretiemu.

5. Nájdite všetky komplexné korene rovnice  $z^n = 1$ . Ukážte, že ak  $\omega \neq 1$ , potom  $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$ . Pre ktoré  $\omega$  budú aj jeho mocniny  $\omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$  koreňmi rovnice?

6. (5.5.22) Pre každú komplexnú maticu  $Z$  vieme nájsť rozklad na jej hermitovskú a anti-hermitovskú časť:  $Z = A + K$ . Podobne ako pri rozklade komplexného čísla  $z = a + ib$  dostaneme jeho reálnu časť ako  $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ , môžeme uvažovať “reálnu časť” matice  $Z$  ako polovicu  $Z + Z^H$ . Nájdite vzorec pre “imaginárnu časť”  $K$  a nájdite rozklady  $A + K$  pre nasledujúce matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

*Pozn.* Komplexná matica  $K$  sa nazýva *anti-hermitovská* (alebo aj *koso-hermitovská*), ak ak pre všetky  $i, j$  platí  $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ .

7. (5.5.7) Napíšte maticu  $A^H$  a spočítajte  $C = A^H A$  ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi  $C$  a  $C^H$ ? Platí niečo podobné pre každú maticu  $C$ , ktorá sa dá zapísať ako  $A^H A$ ?

8. (5.5.9) a) Ako súvisí determinant matice  $A^H$  s determinantom matice  $A$ ?

b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice je reálne číslo.

9. Ukážte, že inverzná matica k hermitovskej (ak existuje) je opäť hermitovská.

10. (5.5.20) Diagonalizujte  $2 \times 2$  anti-hermitovskú maticu  $K = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix}$ . Spočítajte  $e^{Kt} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$  a overte, že  $e^{Kt}$  je unitárna matica pre každú hodnotu parametra  $t$ . Čo bude  $\frac{d}{dt} e^{Kt}$  pre  $t = 0$ ?

11. Ako súvisia vlastné hodnoty matice  $A^H$  s vlastnými hodnotami matice  $A$ ?

12. Ak  $A = R + iS$  je hermitovská matica, budú reálne matice  $R$  a  $S$  symetrické?

13. (5.R.19) Ak je matica  $K$  anti-symetrická, ukážte, že matica  $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$  bude ortogonálna. Nájdite  $Q$  pre  $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ .