Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 29. marec 2023

1. *(5 bodov)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.

b) Nájdite jej vlastné vektory a diagonalizáciu $A = S\Lambda S^{-1}$. Maticu S^{-1} nemusíte počítať, ale ak ju viete nájsť bez dlhého počítania, napíšte ju.

c) Čo všetko sa dá povedať o vlastných hodnotách matice A bez toho aby sme počítali jej charakteristický polynóm? Vysvetlite ako to súvisí s jej vlastnosťami a výsledkami častí a) a b).

2. *(5 bodov)* Čebyševove polynómy druhého druhu spĺňajú rekurentný vzťah

$$p_{k+2}(x) = xp_{k+1}(x) - p_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

pričom $p_0(x) = 1$ a $p_1(x) = x$ pre $x \in \mathbb{R}$.

a) Pre fixné $x \in \mathbb{R}$ prepíšte uvedený rekurentnývzťah do vektorovo-maticového zápisu $u_{k+1} = Au_k$, kde $u_{k+1} = [p_{k+2}(x), p_{k+1}(x)]^T$, A je vhodná matica prechodu a u_0 je vektor počiatočnej podmienky.

b) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a nájdite explicitný predpis pre $p_k(x)$. Vysvetlite, čo sa stane pre $x = 2$, resp. $x = -2$, a nájdite hodnoty $p_k(2)$ a $p_k(-2)$.

3. *(5 bodov)* Nech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna matica.

a) Ukážte, že ak A je diagonalizovateľná, potom $\dim(\mathcal{N}(A)) = \dim(\mathcal{N}(A^k))$, pre všetky $k \in \mathbb{N}$.

b) Predpokladajme, že $\mathcal{S}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^l) \neq \{0\}$ pre nejaké $k, l \in \mathbb{N}$. Ukážte, že A nie je diagonalizovateľná.

4. *(5 bodov)* (pravda/nepravda) So zdôvodnením, resp. príkladom alebo protipríkladom.

a) Ak reálna $n \times n$ matica A spĺňa $A^2 = -I$, potom má nulovú stopu.

b) Ak pre regulárnu $n \times n$ maticu A k nej inverzná matica A^{-1} nie je diagonalizovateľná, potom nie je diagonalizovateľná ani matica A.

c) Ak pre štvorcové matice A a B má matica AB nulu ako vlastnú hodnotu, potom je nula vlastnou hodnotou aj pre niektorú z matíc A alebo B.

d) Ak je jednotka vlastnou hodnotou pre štvorcové matice A a B, potom je jednotka vlastnou hodnotou aj pre ich súčin AB.