Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 3. máj 2023

1. *(5 bodov)* Nech:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický polynóm a vlastné hodnoty matice A.

b) Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.

c) Nájdite minimálny polynóm a Jordanov tvar matice A.

d) Nájdite maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(5 bodov)* Nech A je $n \times n$ matica a M je $2n \times 2n$ bloková matica

$$M = \begin{bmatrix} A & I \\ I & -A \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite blokovo dolnú trojuholníkovú $2n \times 2n$ maticu L, ktorá spĺňa

$$L(M - \lambda I) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & I \\ A^2 - (\lambda^2 - 1)I & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Pomocou časti a) nájdite charakteristický polynóm matice M vyjadrený pomocou matice A. V akom vzťahu sú vlastné hodnoty matice A s vlastnými hodnotami matice M?

c) Ukážte, že ak $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2n}$ je vlastný vektor matice M prislúchajúci k vlastnej hodnote λ, potom pre $u, v \in \mathbb{C}^n$ platí

$$A^2 u = (\lambda^2 - 1)u, \quad A^2 v = (\lambda^2 - 1)v.$$

Navyše, ak u je vlastný vektor matice A, potom $v = ku$ pre nejaké $k \in \mathbb{C}$. Nájdite možné hodnoty k.

3. *(5 bodov)* a) Dokážte, že pre normálnu maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ platí $\mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{N}(A)$.

Návod: Pomocou metód z I. semestra ukážte, že pre reálnu normálnu maticu platí $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(A)$.

b) Ukážte, že z a) vyplýva rovnosť algebraickej a geometrickej násobnosti pre vlastnú hodnotu $\lambda = 0$.

c) Zovšeobecnite tvrdenie z a) pre $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ a podpriestory $\mathcal{S}(A - \lambda I)$, $\mathcal{N}(A - \lambda I) \subseteq \mathbb{C}^n$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. *(5 bodov)* (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.

a) Ak má reálna ortogonálna matica reálne vlastné hodnoty, potom $A^{-1} = A$.

b) Ak matica A spĺňa rovnicu $A^3 = A$, tak je diagonalizovateľná.

c) Matice A a A^T majú rovnaké geometrické násobnosti vlastných hodnôt.