Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Opravná písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie II., 13. jún 2023

1. *(6 bodov)* Nech

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický polynóm matice A, jej vlastné hodnoty a vektory. (4 je vl. hodnotou)

b) Nájdite minimálny polynóm matice A, jej Jordanov tvar a maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(5 bodov)* a) Načrtnite obrázok krivky danej rovnicou $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$.

b) Ak je krivka symetrická podľa nejakých osí, nájdite ich rovnice. Ak sa krivka asymptoticky blíži k nejakým priamkam, nájdite ich rovnice.

c) Nájdite súradnice bodov na krivke, ktoré sú najbližšie k počiatku, jej vrcholy.

d) Do toho istého obrázku načrtnite aj obrázok krivky $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = -1$.

3. *(5 bodov)* Nech A je singulárna $n \times n$ matica. Označme ako K_r priestory $\mathcal{N}(A^r)$.

a) Ukážte, že platí $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq K_4 \subseteq \dots$.

b) Ukážte, že ak pre nejaké r platí $K_r = K_{r+1}$, potom $K_r = K_s$ pre všetky $s \geq r$.

c) Existuje vždy nejaké r, pre ktoré $K_r = K_{r+1}$? Vieme nejako ohraničiť najmenšie také r? Čomu sa rovná?

4. *(6 bodov)* Nech $A = \left[\begin{smallmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

a) Matica e^{At} patrí do $M_{2,2}(\mathbb{R})$, t.j. je to reálna matica. Nájdite jej explictný tvar a vyjadrite jej zložky ako reálne funkcie parametra t.

b) Nech $v \in \mathbb{R}^2$. Aká bude limita $e^{At}v$ pre $t \to \infty$? Závisí odpoveď od vektora v?

c) Nech $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je riešením diferenciálnej rovnice $x'(t) = Ax(t)$. O počiatočnej podmienke $x(0)$ vieme len to, že $\|x(0)\| = 1$. Na obrázku zakreslite všetky možné hodnoty $x(1)$. Aký geometrický objekt budú tieto prípustné riešenia tvoriť?

5. *(12 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením (príkladom) v pravdivom prípade a protipríkladom (zdôvodnením) v nepravdivom:

a) Existuje kladne definitná 3×3 matica s nulami na diagonále.

b) Ak je matica A singulárna, potom sa v jej Jordanovom tvare nachádza nulový riadok.

c) Ak sú matice A a B podobné, potom sú podobné aj matice A^k a B^k pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$.

d) Ak je štvorcová matica A regulárna, potom matice A^TA a AA^T majú rovnaké vlastné hodnoty.

e) Ak je matica A^2 diagonalizovateľná, potom je diagonalizovateľná aj A.

f) Ak je 5×5 matica A podobná matici $-A$, potom je singulárna.

6. *(6 bodov)* Hovoríme, že štvorcová matica A je *rádu* k (pre kladné celé číslo k), ak $A^k = I$ a žiadna z nižších (kladných) mocnín A sa nerovná I.

Ukážte, že rád 2×2 komplexnej matice, ktorá má stopu $i\sqrt{3}$ a determinant -1 je konečný a nájdite ho.