Lineárna algebra a geometria II. – Úloha č. 0

Cvičenia v týždni 17. februára 2025

---

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Je dané lineárne zobrazenie $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané predpisom

$$\alpha : [x_1, x_2]^T \mapsto [2x_1 - 3x_2, x_1 + 6x_2].$$

Nájdite maticu transformácie T_α vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{[-3, 1]^T, [1, -1]^T\}$.

3. (5.1.12) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre maticu $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$.

4. (5.1.5) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ sa rovná stope matice a súčin $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ sa rovná determinantu.

5. (5.1.7) Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $Ax = \lambda x$. Overte, že x je bude vlastným vektorom matíc

(a) cA, kde $c \in \mathbb{R}$,
(b) $A + cI$, kde $c \in \mathbb{R}$,
(c) A^2, A^3, …, A^n,
(d) $A^2 - 2A + I$,
(e) A^{-1}, ak $\lambda \neq 0$;

akým vlastným hodnotám bude v jednotlivých častiach (a)–(e) zodpovedať?

6. (5.1.14) Nájdite hodnosť a všetky štyri vlastné hodnoty pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aké vlastné vektory zodpovedajú nenulovým vlastným hodnotám?

7. a) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory $n \times n$ matice samých jednotiek

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

8. (5.1.11) Ukážte, že A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty porovnaním ich charakteristických polynómov.