Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 24. februára 2025

---

1. (5.1.13) Ak matica B má vlastné hodnoty 1, 2, 3, matica C má vlastné hodnoty 4, 5, 6 a matica D má vlastné hodnoty 7, 8, 9, čo budú vlastné hodnoty 6×6 matice $A = \left[\begin{smallmatrix} B & C \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right]$?

2. (5.1.16) Nech A je 4×4 matica samých jednotiek. Nájdite potom vlastné hodnoty a determinant matice $A - I$.

3. (5.1.18) Predpokladajme, že matica A má vlastné hodnoty 0, 1, 2 a k nim vlastné vektory v_0, v_1, v_2. Opíšte nulový priestor a stĺpcový priestor matice A. Riešte rovnicu $Ax = av_1 + bv_2$. Ukážte, že rovnica $Ax = v_0$ nemá riešenie.

4. (5.2.2) Nájdite maticu A, ktorej vlastné hodnoty sú 1 a 4 a vlastné vektory k nim sú $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

5. (5.2.6) (a) Ak $A^2 = I$, aké môže mať matica A vlastné hodnoty?
(b) Ak je takáto matica typu 2×2 a nerovná sa I alebo $-I$, nájdite jej stopu a determinant.
(c) Dopočítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok $(3, -1)$.

6. (5.2.8) Predpokladajme, že $A = uv^T$, teda matica A vznikne vynásobením stĺpca riadkom (a má preto hodnosť 1).
(a) Ukážte, prenásobením matice A vektorom u, že u je jej vlastný vektor. Čo bude λ?
(b) Aké sú ostatné vlastné hodnoty (a prečo)?
(c) Vypočítajte stopa$(A) = v^T u$ dvoma rôznymi spôsobmi – ako súčet prvkov na diagonále a ako súčet vlastných hodnôt.

7. (5.2.9) Spomeňte si, že matice $A_{m\times n}B_{n\times m}$ a $B_{n\times m}A_{m\times n}$ majú rovnakú stopu, t.j. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Odvoďte z toho (v prípade $m = n$), že $AB - BA = I$ nemôže nastať. (Je to možné iba pre zobrazenia na nekonečne rozmerných priestoroch, a v skutočnosti dôležité vo fyzike. Súvisí to s Heisenbergovým princípom neurčitosti.)

8. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. (5.1.17) Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charakteristický polynóm $\det(A - \lambda I)$ bol $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

10. (5.2.7) Nájdite A^{100} ak $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

11. (5.2.11) Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je invertibilná,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

12*. (čiastočná diagonalizácia) Nech A je $n\times n$ matica a λ je jej vlastná hodnota. Ukážte, že $AN_A(\lambda) \geq GN_A(\lambda)$. Ukážte, že A je diagonalizovateľná práve vtedy, keď pre každú vlastnú hodnotu λ matice A platí $AN_A(\lambda) = GN_A(\lambda)$.