

1. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu  $e^{At}$  pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžete vypočítať pomocou vzorca  $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$  alebo sčítaním nekonečného radu  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

2. (5.4.2) Pre maticu  $A$  z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice  $du/dt = Au$ . Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku  $u_0 = (3, 1)^T$ . Aký je *rovnovážny stav* keď  $t \rightarrow \infty$ ? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu;  $\lambda = 0$  v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá  $\lambda = 1$  v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti  $e^{0t} = 1$ ).

3. (5.4.4) Ak  $P$  je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu  $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \dots$ , že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

4. (5.4.5) Diagonálna matica, napr.  $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , spĺňa rovnosť  $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}$ , nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

a) zdôvodnite prečo platí  $e^{A(t+T)} = e^{At}e^{AT}$ , použijúc vzťah  $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ ,

b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah  $e^{A+B} = e^Ae^B$  na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov})$$

5. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre  $u'_1$ ,  $u'_2$  a  $u'_3$  a ukážte, že  $u'_1u_1 + u'_2u_2 + u'_3u_3 = 0$ ,

b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora  $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$  je konštantná v čase,

c) nájdite vlastné hodnoty matice  $A$ .

6. Vychádzajúc zo vzorca  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$  zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ .

7. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín  $J^k$ . Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte  $e^{Jt}$ .

Skúste vypočítať mocniny  $J_n^k$  a exponenciálu  $e^{J_n t}$  aj pre  $n \times n$  maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

*Návod.* Opäť napíšte  $J_n = \lambda I + N$ .

8. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov  $z(t)$  a vlkov  $v(t)$  spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 4z - 2v, \\ \frac{dv}{dt} &= z + v.\end{aligned}$$

- a) Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)
- b) Ak na začiatku máme  $z_0 = 300$  a  $v_0 = 200$ , ako bude vyzerat stav populácií v čase  $t$ ?
- c) Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

9. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = 0,$$

s počiatočnou podmienkou  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ . Funkcia  $x(t)$  nech obsahuje iba reálne funkcie v premennej  $t$ .