Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 5

Pre týždeň 24. marca 2025

---

1. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$ dimenzie n. Ukážte, že V je $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor.

2. Komplexná $n \times n$ matica sa nazýva *hermitovská*, ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Ukážte, že hermitovské matice tvoria reálny vektorový podpriestor v priestore komplexných matíc $M_{n,n}(\mathbb{C})$, nájdite jeho bázu a určite jeho dimenziu. Ukážte tiež, že hermitovské matice netvoria komplexný vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

3. (5.5.2) Čo sa dá povedať o:
i) súčte komplexného čísla s číslom s ním združeným?
ii) komplexnom združení čísla na jednotkovej kružnici?
iii) súčine dvoch čísel z jednotkovej kružnice?
iv) súčte dvoch čísel z jednotkovej kružnice?

4. (5.5.4) Nájdite hodnoty a a b pre komplexné čísla $a + ib$ na jednotkovej kružnici, ktorých argument zodpovedá uhlom $\theta = 30°$, $60°$, $90°$. Overte, že druhá mocnina prvého z nich sa rovná druhému a jeho tretia mocnina tretiemu.

5. Nájdite všetky komplexné korene rovnice $z^n = 1$. Ukážte, že ak $\omega \neq 1$, potom $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$. Pre ktoré ω budú aj jeho mocniny ω^2, ω^3, $\dots \omega^{n-1}$ koreňmi rovnice?

6. (5.5.22) Pre každú komplexnú maticu Z vieme nájsť rozklad na jej hermitovskú a anti-hermitovskú časť: $Z = A + K$. Podobne ako pri rozklade komplexného čísla $z = a + ib$ dostaneme jeho reálnu časť ako $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, môžeme uvažovať “reálnu časť” matice Z ako polovicu $Z + Z^H$. Nájdite vzorec pre “imaginárnu časť” K a nájdite rozklady $A + K$ pre nasledujúce matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Pozn. Komplexná matica K sa nazýva *anti-hermitovská* (alebo aj *koso-hermitovská*), ak ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

7. (5.5.7) Napíšte maticu A^H a spočítajte $C = A^H A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi C a C^H? Platí niečo podobné pre každú maticu C, ktorá sa dá zapísať ako $A^H A$?

8. (5.5.9) a) Ako súvisí determinant matice A^H s determinantom matice A?
b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice je reálne číslo.

9. Ukážte, že inverzná matica k hermitovskej (ak existuje) je opäť hermitovská.

10. (5.5.20) Diagonalizujte 2×2 anti-hermitovskú maticu $K = \left[\begin{smallmatrix} i & i \\ i & i \end{smallmatrix}\right]$. Spočítajte $e^{Kt} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ a overte, že e^{Kt} je unitárna matica pre každú hodnotu parametra t. Čo bude $\frac{d}{dt}e^{Kt}$ pre $t = 0$?

11. Ako súvisia vlastné hodnoty matice A^H s vlastnými hodnotami matice A?

12. Ak $A = R + iS$ je hermitovská matica, budú reálne matice R a S symetrické?

13. (5.R.19) Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.