Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 7

Pre týždeň 7. apríla 2025

1.(5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3, spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.

b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice $A = S\Lambda S^{-1}$: Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0$.

c) Ak má 3×3 matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3, čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$? Čo to bude za matica?

2. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.

3. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q, tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.

b) Overte, že $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry. Vysvetlite.

4. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti–Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

5. Nájdite dve normálne matice, ktorých súčin nebude normálna matica.

Pozn.: Toto znamená, že množina normálnych matíc nie je uzavretá vzhľadom na súčin. Je uzavretá vzhľadom na súčet?

6. (5.6.19) Predpokladajme, že T je $n \times n$ horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij}. Porovnajte zložky TT^H a $T^H T$ a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.

7. (5.R.5) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c? Nájdite reálnu maticu A takú, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.

8. (5.6.20) Ukážte, že ak je N normálna matica, potom $||Nx|| = ||N^H x||$ pre každý vektor x. Odvoďte z toho, že i-ty riadok matice N má rovnakú dĺžku ako i-ty stĺpec matice N.

Pozn.: Ak je N navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že N musí byť diagonálna (porovnaj s príkladom č. 6).

9*. *"Normálne matice komutujú práve vtedy, keď sú diagonalizovateľné rovnakou maticou".*

Spomeňte si, že ak sú matice diagonalizovateľné rovnakou maticou, potom komutujú. Uvažujme teraz dve normálne $n \times n$ matice A a B, pričom $AB = BA$.

(a) Nech λ je vlastná hodnota B a $\{v_1, \dots, v_k\}$ tvorí ortonormálnu bázu $\mathcal{N}(B - \lambda I)$. Ukážte, že

$$Av_1, Av_2, \dots, Av_k \in \mathcal{N}(B - \lambda I).$$

(b) Ak usporiadame vektory $v_1, \dots, v_k$ do stĺpcov, vznikne $n \times k$ matica V. Ukážte, že

(i) $V^H V = I$,

(ii) $V^H B V = \lambda I$,

(iii) existuje $k \times k$ matica C, že $AV = VC$,

(iv) matica C je tiež normálna.

(c) Ukážte, že existuje spoločná $n \times k$ matica $\tilde{V}$, pričom $\tilde{V}^H \tilde{V} = I$, že matice $\tilde{V}^H B \tilde{V}$ a $\tilde{V}^H A \tilde{V}$ sú diagonálne.

Ako rozšíriť postup z častí (a)–(c), aby sme dokázali tvrdenie zo začiatku príkladu?