Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 9

Pre týždeň 21. apríla 2025

1. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.
a) Regulárna matica nemôže byť podobná singulárnej matici.
b) Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.
c) Matica A nemôže byť podobná matici $-A$ okrem prípadu ak $A = 0$.
d) $A - I$ nemôže byť podobná matici $A + I$.
e) $A + I$ nemôže byť podobná matici $I - A$.
f) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.
g) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

2. *"Podobné matice majú rovnaké geometrické násobnosti jednotlivých vlastných hodnôt."*
Nech matice A a B sú podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$.
(a) Ukážte, že $B - \lambda I = M^{-1}(A - \lambda I)M$, resp. $(B - \lambda I)^k = M^{-1}(A - \lambda I)^k M$, pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$.
(b) Nech λ je teraz vlastná hodnota matíc A a B. Ukážte, že potom platí $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(B - \lambda I)^k$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. (*Návod.* Uvažujte najskôr $k = 1$ a bázu $\{v_1, \ldots, v_m\}$ priestoru $\mathcal{N}(B - \lambda I)$. Ukážte, že $\{Mv_1, \ldots, Mv_m\}$ je báza $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.)

3. Ukážte, že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.
Definícia minimálneho polynómu matice: $m_A(x) = x^k + m_{k-1}x^{k-1} + \cdots + m_1 x + m_0$ je taký nenulový polynóm, ktorý 'nuluje' maticu A, t.j. $m_A(A) = A^k + m_{k-1}A^{k-1} + \cdots + m_1 A + m_0 I = 0$ a súčasne je jeho stupeň k najnižší možný.

4. Nech J a J' sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde σ je nejaká permutácia. Ukážte, že matice J a J' sú podobné.
Pozn. Maticu J' dostaneme z J poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov e_i.

5. Nech U je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$, $T : U \to U$ je lineárne zobrazenie a $V \subseteq U$ je vektorový podpriestor. Hovoríme, že V je *invariantný podpriestor* vzhľadom na zobrazenie T (tzv. T-invariantný podpriestor), ak $\forall v \in V : T(v) \in V$. Uvažujme $U = \mathbb{C}^3$ a zobrazenie $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $T : x \mapsto Ax$, dané maticou

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Overte, že $V = \operatorname{span}\{(1, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T\}$ je invariantný podpriestor vzhľadom na zobrazenie T.
b) Nájdite 2×2 maticu A' zúženého zobrazenia $T|_V : V \to V$. Ukážte, že $\chi_{A'}$ delí χ_A.
c) Nájdite jednorozmerný T-invariantný podpriestor W tak, aby $V \cap W = \{\vec{0}\}$ a $V \oplus W = \mathbb{C}^3$.
d) Ako vyzerajú všetky jednorozmerné, dvojrozmerné a trojrozmerné invariantné podpriestory zobrazenia T?

6. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné podpriestory V_λ, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T, t.j. $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
Definícia zovšeobecneného vlastného podpriestoru: $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0 \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}\}$, resp. $V_\lambda = \bigcup_k \mathcal{N}(A - \lambda I)^k$.

7. Majme maticu A. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné vektorové priestory V_{λ_1} a V_{λ_2} prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám λ_1 a λ_2 majú triviálny prienik.

8. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať. Aké sú minimálne polynómy matíc J a K?

9. Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu B nájdite aj jej Jordanov tvar.

10. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A. Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$.

b) Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1}JM_0 = J^T$.

c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A.

11. Nech A je komplexná $n \times n$ matica spĺňajúca $A^k = I$ pre nejaké k. Aké môžu byť vlastné hodnoty matice A? Ukážte, že A je diagonalizovateľná (Aký môže byť Jordanov tvar matice A? Ako vyzerá trojuholníková T zo Schurovej lemmy?).