Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 10

Pre týždeň 28. apríla 2025

---

1. Predpokladajme, že nenulové vektory $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ spĺňajú rovnosti $Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$ pre $i = 1, \ldots, k-1$ a $Ax_0 = \lambda x_0$, teda ide o reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastnú hodnotu λ. Ukážte, že $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sú lineárne nezávislé. Ukážte tiež, že $k \leq n$.

2. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru J pre maticu A s exponentami d_i vo faktorizácii minimálneho polynómu $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\ldots(x-\lambda_m)^{d_m}$? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice A?

3. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J.)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar J.

4. Nájdite rozklad $B = MJM^{-1}$ pre maticu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Nájdite rozklad $A = MJM^{-1}$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. (B.3) Pre maticu

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite e^{Bt} ako $Me^{Jt}M^{-1}$ a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \cdots$.

7. Nájdite Jordanove rozklady pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Dokážte alebo vyvráťte: matica A typu $n \times n$ je antisymetrická práve vtedy, keď $x^T Ax = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$. (*Návod.* Môžete diagonalizovať antisymetrickú maticu A alebo dosadiť za $e_i + e_j$ pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.)