Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 9. apríl 2024

1. *(5 bodov)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.

b) Nájdite jej vlastné vektory a diagonalizáciu $A = S\Lambda S^{-1}$. Maticu S^{-1} nemusíte počítať, ale ak ju viete nájsť bez dlhého počítania, napíšte ju.

c) Čo všetko sa dá povedať o vlastných hodnotách matice A bez toho aby sme počítali jej charakteristický polynóm? Vysvetlite ako to súvisí s jej vlastnosťami a výsledkami častí a) a b).

2. *(5 bodov)* Uvažujme sústavu diferenčných rovníc v tvare

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2i} y_n - \frac{1}{2i} z_n, \\ y_{n+1} &= e^i y_n, \\ z_{n+1} &= e^{-i} z_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

s počiatočnou podmienkou $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$.

a) Prepíšte túto sústavu do tvaru $u_{n+1} = Au_n$ s počiatočnou podmienkou u_0 pre vhodné vektory u_n, u_0 a maticu A.

b) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory matice A a maticovú mocninu A^n.

c) Nájdite explicitné predpisy pre x_n, y_n a z_n. Ak je to možné, predpis pre x_n nech obsahuje iba reálne funkcie v premennej n.

d) Ako sa z časti c) dá nájsť suma $\sum_{k=0}^{n} \sin(k)$? Nájdite ju.

3. *(4 body)* Nech A je $n \times n$ matica s vlastnými hodnotami $\lambda \neq 0$.

a) Dokážte, že $\mathrm{adj}(A)$ má rovnaké vlastné vektory ako A.

b) Ak v je vlastný vektor matice A s vlastnou hodnotou λ, aká je príslušná vlastná hodnota matice $\mathrm{adj}(A)$?

4. *(6 bodov)* (pravda/nepravda) So zdôvodnením, resp. príkladom alebo protipríkladom.

a) Horná trojuholníková matica sa dá diagonalizovať pomocou hornej trojuholníkovej matice.

b) Matica $A = e^{BB^T}$ je symetrická a má kladné vlastné hodnoty.

c) Ak má $n \times n$ matica charakteristický polynóm $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$, tak je diagonalizovateľná.

d) Ako v c): ak má $n \times n$ matica charakteristický polynóm $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$, tak $A^n = I$.