Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 7. máj 2024

1. *(5 bodov)* Nech:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický polynóm a vlastné hodnoty matice A.

b) Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.

c) Nájdite minimálny polynóm a Jordanov tvar matice A.

d) Nájdite maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(5 bodov)* Majme reálnu 2×2 ortogonálnu maticu A, pre ktorú sú A^{-1} a A^3 podobné.

a) Aké môžu byť vlastné hodnoty A, ak navyše predpokladáme, že $A^{-1} = A^3$?

b) Ako vyzerajú všetky reálne ortogonálne matice, pre ktoré $A^{-1} = A^3$?

c) Aké môžu byť vlastné hodnoty A, ak A^3 je podobná A^{-1}, ale $A^3 \neq A^{-1}$?

d) Ako vyzerajú všetky reálne ortogonálne matice, pre ktoré $A^3 \sim A^{-1}$ ale $A^3 \neq A^{-1}$?

3. *(5 bodov)* Uvažujme maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ s vlastným vektorom $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$ a príslušnou vlastnou hodnotou λ. Predpokladajme, že k-ta zložka vektora v má najväčšiu dĺžku, t.j. $|v_k| = \max_{j=1,2,\dots,n}\{|v_j|\}$.

a) Ukážte, že vlastná hodnota λ sa nachádza v tzv. Geršgorinovom disku, t.j. platí

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.$$

b) Ukážte, že platí "opačná" trojuholníková nerovnosť pre komplexné čísla $x, y \in \mathbb{C}$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

a pomocou nej a časti a) ukážte, že ak A je markovovská matica, potom $|\lambda| \leq 1$.

c) Nájdite charakteristický polynóm matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a ukážte, že jeho korene sa nachádzajú v disku $\{z \mid |z| \leq 1 + \max_{j=0,1,\dots,n-1}\{|a_j|\}\}$.

4. *(5 bodov)* (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.

a) Ak má reálna ortogonálna matica reálne vlastné hodnoty, potom je symetrická.

b) Ak $n \times n$ matica A spĺňa rovnicu $A^2 - 5A + 6I = 0$, tak je diagonalizovateľná.

c) Ak je matica A diagonalizovateľná, tak je diagonalizovateľná aj A^T, a teda sú podobné.