Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie II., 29. mája 2024

1. *(6 bodov)* Majme maticu A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický a minimálny polynóm matice A.
b) Nájdite jej vlastné vektory, Jordanov tvar a maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. *(5 bodov)* Na priestore matíc $M_{2,2}(\mathbb{R})$ majme lineárne zobrazenie α dané ako $\alpha : A \mapsto \mathrm{Adj}(A)$, t.j. $\alpha : \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty zobrazenia α, pre každú z nich nájdite aj vlastný podpriestor v $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Aký je minimálny polynóm zobrazenia α? Ako by sa to dalo nahliadnuť?

3. *(5 bodov)* Ak do rovnice kužeľosečky $x^T Ax = c$ dosadíme namiesto vektora x posunutý vektor $x - s$, dostaneme rovnicu $(x - s)^T A(x - s) = c$, ktorá opisuje podobnú krivku ako pôvodná rovnica, len jej stred bude umiestnený v s namiesto počiatku $(0, 0)^T$.

Nájdite vyjadrenie rovnice

$$21x_1^2 - 6x_1x_2 + 29x_2^2 - 90x_1 + 70x_2 + 115 = 0$$

v tvare $(x - s)^T A(x - s) = c$ a načrtnite obrázok krivky danou touto rovnicou. Nájdite vrcholy krivky a rovnice osí symetrie. Nájdite rovnice asymptot, ak existujú.

4. *(6 bodov)* Nech A je $n\times n$ regulárna matica s n rôznymi vlastnými hodnotami $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a vlastnými vektormi $x_1, \ldots, x_n$. Nech B je $n \times n$ matica, pre ktorú platí $AB = BA^{-1}$.
a) Ukážte, že matice spĺňajúce rovnosť $AB = BA^{-1}$ tvoria vektorový podpriestor priestoru $M_{n,n}(\mathbb{C})$.
b) Predpokladajme, že B je regulárna. Čo sa dá v takom prípade povedať o vlastných hodnotách matice A? A o vektoroch Bx_i?
c) Nájdite vlastné vektory matice B^2 pri predpoklade, že B je regulárna. Budú to aj vlastné vektory matice B?
d) Ukážte, že B^2 je diagonalizovateľná.

5. *(12 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením (príkladom) v pravdivom prípade a protipríkladom (zdôvodnením) v nepravdivom:
a) Matica kolmej projekcie je kladne semidefinitná.
b) Ak A a B sú reálne diagonalizovateľné $n \times n$ reálne matice, potom aj $A + B$ je diagonalizovateľná.
c) Pre reálnu symetrickú kladne definitnú maticu A existuje regulárna matica C taká, že $C^T AC = I$.
d) Ak reálna symetrická $n \times n$ matica A spĺňa $A^6 = I$, potom $A^2 = I$.
e) Matice AB a BA typu $n \times n$ majú rovnaký minimálny polynóm.
f) Mocniny A^k normálnej matice A sú normálne pre $k \geq 1$.

6. *(6 bodov)* Nech A, B sú dve komplexné $n \times n$ matice, ktoré spĺňajú vzťah $A^H A = B^H B$. Nech V je unitárna matica, ktorá diagonalizuje $A^H A$, t.j. $A^H A = V \Lambda V^H$.
a) Ukážte, že matice $A^H A$ a AA^H majú rovnaké vlastné hodnoty.
b) Ukážte, že existuje unitárna matica U taká, že platí $BB^H = UAA^H U^H$.
c) Vysvetlite, prečo platia rovnosti $\mathcal{S}(B) = \mathcal{S}(UA)$, $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(B^H) = \mathcal{N}(A^H U^H)$ a $\mathcal{S}(B^H) = \mathcal{S}(A^H)$.
d) Ukážte, že $\mathcal{S}(B^H) = \mathcal{S}(B^H B) \subseteq \mathcal{S}(V)$. Musí nutne platiť $B = UA$?