

**1.** (5.1.13) Ak matica  $B$  má vlastné hodnoty 1, 2, 3, matica  $C$  má vlastné hodnoty 4, 5, 6 a matica  $D$  má vlastné hodnoty 7, 8, 9, čo budú vlastné hodnoty  $6 \times 6$  matice  $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ ?

**2.** (5.1.16) Nech  $A$  je  $4 \times 4$  matica samých jednotiek. Nájdite potom vlastné hodnoty a determinant matice  $A - I$ .

**3.** (5.1.18) Predpokladajme, že matica  $A$  má vlastné hodnoty 0, 1, 2 a k nim vlastné vektory  $v_0, v_1, v_2$ . Opíšte nulový priestor a stĺpcový priestor matice  $A$ . Riešte rovnicu  $Ax = av_1 + bv_2$ . Ukážte, že rovnica  $Ax = v_0$  nemá riešenie.

**4.** (5.2.2) Nájdite maticu  $A$ , ktorej vlastné hodnoty sú 1 a 4 a vlastné vektory k nim sú  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**5.** (5.2.6) (a) Ak  $A^2 = I$ , aké môže mať matica  $A$  vlastné hodnoty?

(b) Ak je takáto matica typu  $2 \times 2$  a nerovná sa  $I$  alebo  $-I$ , nájdite jej stopu a determinant.

(c) Dopocítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok  $[3, -1]$ .

**6.** (5.2.8) Predpokladajme, že  $A = uv^T$ , teda matica  $A$  vznikne vynásobením stĺpca riadkom (a má preto hodnotu 1).

(a) Ukážte, pre násobením matice  $A$  vektorom  $u$ , že  $u$  je jej vlastný vektor. Čo bude  $\lambda$ ?

(b) Aké sú ostatné vlastné hodnoty (a prečo)?

(c) Vypočítajte stopu  $\text{tr}(A) = v^T u$  dvoma rôznymi spôsobmi – ako súčet prvkov na diagonále a ako súčet vlastných hodnôt.

**7.** (5.2.9) Spomeňte si, že matice  $A_{m \times n} B_{n \times m}$  a  $B_{n \times m} A_{m \times n}$  majú rovnakú stopu, t.j.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . Odvodte z toho (v prípade  $m = n$ ), že  $AB - BA = I$  nemôže nastať. (Je to možné iba pre zobrazenia na nekonečne rozmerných priestoroch, a v skutočnosti dôležité vo fyzike. Súvisí to s Heisenbergovým princípom neurčitosti.)

**8.** Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**9.** (5.1.17) Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charakteristický polynóm  $\det(A - \lambda I)$  bol  $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$ .

**10.** Nech  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Nájdite diagonalizáciu  $A = SAS^{-1}$  a pomocou neho vypočítajte  $A^{100}$ .

**11.** (5.2.11) Ak vlastné hodnoty  $3 \times 3$  matice  $A$  sú 1, 1 a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.

a)  $A$  je invertibilná,

b)  $A$  je diagonalizovateľná,

c)  $A$  nie je diagonalizovateľná.

**12\*.** (čiasťčná diagonalizácia) Nech  $A$  je  $n \times n$  matica a  $\lambda$  je jej vlastná hodnota. Ukážte, že  $AN_A(\lambda) \geq GN_A(\lambda)$ . Ukážte, že  $A$  je diagonalizovateľná práve vtedy, keď pre každú vlastnú hodnotu  $\lambda$  matice  $A$  platí  $AN_A(\lambda) = GN_A(\lambda)$ .