

1. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

2. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty y_k a z_k pre $k \rightarrow \infty$ ak

$$y_{k+1} = 0.8y_k + 0.3z_k \quad y_0 = 0$$

$$z_{k+1} = 0.2y_k + 0.7z_k \quad z_0 = 5.$$

Tiež nájdite formuly pre y_k a z_k použijúc $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

3. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Stahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fíľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fíľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte 3×3 maticu prechodu A a nájdite stály stav u_∞ zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

4. (5.3.12) Ak A je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora Ax sa rovná súčtu zložiek vektora x . Odvoďte z toho, že ak $Ax = \lambda x$ pre $\lambda \neq 1$, potom súčet zložiek vlastného vektora x je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

5. Ak A je Markovovská matica, ukážte, že vektor $[1, 1, \dots, 1]^T$ je vlastný vektor matice A^T pre $\lambda = 1$. Keďže vieme, že matice A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty, toto je alternatívny dôkaz toho, že jednotka je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice.

6. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory k permutačným maticiam

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi $(1, 1, 1)^T$ (resp. $(1, 1, 1, 1)^T$)?

7. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre rotačnú maticu

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

8. Nech $z = 2 - 3i$.

- Nájdite modulus (dĺžku) čísla z .
- Nájdite goniometrický tvar z , t.j. $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.
- Nájdite exponenciálny tvar z , t.j. $z = re^{i\varphi}$.
- Nájdite siedmu mocninu čísla z .
- Nájdite siedme odmocniny čísla z .
- Nájdite komplexne združené číslo k číslu z .

9. Existuje reálna 2×2 matica, rôzna od I , ktorá spĺňa $A^3 = I$? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať $\lambda^3 = 1$, čo spĺňajú okrem jednotky práve čísla $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akú stopu a determinant by teda mala matica A mať? Nájdite A .