

1. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu e^{At} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžete vypočítať pomocou vzorca $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ alebo sčítaním nekonečného radu $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$.

2. (5.4.2) Pre maticu A z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $du/dt = Au$. Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $u_0 = (3, 1)^T$. Aký je *rovnovážny stav* keď $t \rightarrow \infty$? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu; $\lambda = 0$ v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá $\lambda = 1$ v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti $e^{0t} = 1$).

3. (5.4.4) Ak P je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \dots$, že

$$e^P = I + (e - 1)P.$$

4. (5.4.5) Diagonálna matica, napr. $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, spĺňa rovnosť $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t}e^{\Lambda T}$, nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

a) zdôvodnite prečo platí $e^{A(t+T)} = e^{At}e^{AT}$, použijúc vzťah $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$,

b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah $e^{A+B} = e^Ae^B$ na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov})$$

5. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre u'_1 , u'_2 a u'_3 a ukážte, že $u'_1u_1 + u'_2u_2 + u'_3u_3 = 0$,

b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ je konštantná v čase,

c) nájdite vlastné hodnoty matice A .

6. Vychádzajúc zo vzorca $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

7. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín J^k . Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte e^{Jt} .

Skúste vypočítať mocniny J_n^k a exponenciálu e^{Jnt} aj pre $n \times n$ maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Návod. Opäť napíšte $J_n = \lambda I + N$.

8. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov $z(t)$ a vlkov $v(t)$ spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= 4z - 2v, \\ \frac{dv}{dt} &= z + v.\end{aligned}$$

- a) Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)
- b) Ak na začiatku máme $z_0 = 300$ a $v_0 = 200$, ako bude vyzerat stav populácií v čase t ?
- c) Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

9. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$x''(t) + x'(t) + x(t) = 0,$$

s počiatočnou podmienkou $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Funkcia $x(t)$ nech obsahuje iba reálne funkcie v premennej t .