

1. (5.5.12) *Pravda/Nepravda*. Zdôvodnite v pravdivom prípade a nájdite protipríklad v nepravdivom:
- Ak A je hermitovská matica, potom $A + iI$ je invertibilná.
 - Ak Q je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je invertibilná.
 - Ak A má reálne zložky, potom $A + iI$ je invertibilná.

2. (5.5.14) Pre nasledujúce matice rozhodnite či patria do nižšie uvedených maticových množín.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množiny ortogonálnych, invertibilných, projekčných, permutačných, hermitovských, diagonalizovateľných, symetrických a markovovských matíc a množina matíc hodnosti 1.

3. (5.5.16) Uveďte jeden významný fakt o vlastných hodnotách
- reálnej symetrickej matice,
 - stabilnej matice; t.j. všetky riešenia systému $du/dt = Au$ konvergujú do nuly,
 - markovovskej matice,
 - nediagonalizovateľnej matice,
 - singulárnej matice.
 - ortogonálnej matice,

4. (5.5.17) Ukážte, že ak sú matice U a V unitárne, potom je unitárnou maticou aj ich súčin UV . Využite definičnú podmienku $U^H U = I$.

5. (5.5.18) Ukážte, že determinant unitárnej matice spĺňa $|\det U| = 1$, ale determinant sa nemusí nutne rovnať jednotke. Tiež ukážte, že matice U a U^H môžu mať rôzne determinanty.

6. (5.5.19) Nájdite tretí stĺpec $[x, y, z]^T \in \mathbb{C}^3$ matice

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & x \\ 1/\sqrt{3} & 0 & y \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & z \end{bmatrix},$$

tak aby bola unitárna. Akú veľkú voľnosť pri takomto výbere máme?

7. Nájdite chybu v nasledujúcom “dôkaze” toho, že každá vlastná hodnota matice s reálnymi zložkami je reálne číslo:

Rovnosť $Ax = \lambda x$ môžeme zľava prenásobiť x^T , čím dostaneme $x^T Ax = \lambda x^T x$. Z toho $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$, čo je pre $x \in \mathbb{R}^n$ vždy reálne číslo.

(Porzite tiež str. 295 v knižke)

8. (5.5.21) Nájdite všetky 3×3 matice, ktoré sú súčasne hermitovské, unitárne aj diagonálne. Koľko ich bude?

9. Ak vynásobíme hermitovskú maticu A reálnym číslom c , bude potom aj matica cA hermitovská? Ak zvolíme $c = i$, ukážte, že potom bude iA antihermitovská. Vysvetlite ako tento fakt súvisí s vetou o vlastných hodnotách hermitovských a antihermitovských matíc.

10. Ak $A + iB$ je unitárna matica (A aj B sú reálne matice), ukážte, že $Q = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ je ortogonálna matica.

11. (5.5.20) Diagonalizujte 2×2 antihermitovskú maticu $K = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix}$. Spočítajte $e^{Kt} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ a overte, že e^{Kt} je unitárna matica pre každú hodnotu parametra t . Čo bude $\frac{d}{dt}e^{Kt}$ pre $t = 0$?