

Podobnosť matíc

1. “Podobné matice majú rovnaké geometrické násobnosti jednotlivých vlastných hodnôt.”

Nech matice A a B sú podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$.

(a) Ukážte, že $B - \lambda I = M^{-1}(A - \lambda I)M$, resp. $(B - \lambda I)^k = M^{-1}(A - \lambda I)^k M$, pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Nech λ je teraz vlastná hodnota matíc A a B . Ukážte, že potom platí $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(B - \lambda I)^k$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. (Návod. Uvažujte najskôr $k = 1$ a bázu $\{v_1, \dots, v_m\}$ priestoru $\mathcal{N}(B - \lambda I)$. Ukážte, že $\{Mv_1, \dots, Mv_m\}$ je báza $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.)

2. Ukážte, že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

Definícia minimálneho polynómu matice: $m_A(x) = x^k + m_{k-1}x^{k-1} + \dots + m_1x + m_0$ je taký nenulový polynóm, ktorý ‘nuluje’ maticu A , t.j. $m_A(A) = A^k + m_{k-1}A^{k-1} + \dots + m_1A + m_0I = 0$ a súčasne je jeho stupeň k najnižší možný.

Invariantné podpriestory, zovšeobecnené vlastné vektory

3. Nech U je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$, $T : U \rightarrow U$ je lineárne zobrazenie a $V \subseteq U$ je vektorový podpriestor. Hovoríme, že V je *invariantný podpriestor* vzhľadom na zobrazenie T (tzv. T -invariantný podpriestor), ak $\forall v \in V : T(v) \in V$. Uvažujme $U = \mathbb{C}^3$ a zobrazenie $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $T : x \mapsto Ax$, dané maticou

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Overte, že $V = \text{span}\{(1, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T\}$ je invariantný podpriestor vzhľadom na zobrazenie T .
- Nájdite 2×2 maticu A' zúženého zobrazenia $T|_V : V \rightarrow V$. Ukážte, že $\chi_{A'}$ delí χ_A .
- Nájdite jednorozmerný T -invariantný podpriestor W tak, aby $V \cap W = \{\vec{0}\}$ a $V \oplus W = \mathbb{C}^3$.
- Ako vyzerajú všetky jednorozmerné, dvojrozmerné a trojrozmerné invariantné podpriestory zobrazenia T ?

Definícia. Nech $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ je matica s vlastnou hodnotou $\lambda \in \mathbb{C}$. Zovšeobecnený vlastný vektor matice A prislúchajúci vlastnej hodnote λ nazývame vektor $\vec{0} \neq x \in \mathbb{C}^n$, pre ktorý platí $\exists k \in \mathbb{N} : (A - \lambda I)^k x = \vec{0}$ (resp. $\exists k \in \mathbb{N} : x \in \mathcal{N}((A - \lambda I)^k)$).

Zovšeobecnený vlastný vektor k -teho rádu je taký zovšeobecnený vlastný vektor x , pre ktorý platí $(A - \lambda I)^k x = \vec{0}$, ale $(A - \lambda I)^{k-1} x \neq \vec{0}$.

Vektorový podpriestor tvorený všetkými zovšeobecnenými vlastnými vektormi, ktoré zodpovedajú tej istej vlastnej hodnote λ , spolu s nulovým vektorom $\vec{0}$ tvoria zovšeobecnený vlastný podpriestor $V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \exists k \in \mathbb{N} : (A - \lambda I)^k x = \vec{0}\}$, alebo inak $V_\lambda = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{N}((A - \lambda I)^k)$.

4. Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ a $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. a) Ukážte, že platia inklúzie $\mathcal{N}((A - \lambda I)^l) \subseteq \mathcal{N}((A - \lambda I)^k)$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$.

b) Ukážte, že ak pre nejaké $m \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{N}((A - \lambda I)^m) = \mathcal{N}((A - \lambda I)^{m+1})$, potom $\mathcal{N}((A - \lambda I)^m) = \mathcal{N}((A - \lambda I)^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m$.

c) Ukážte, že takéto číslo m vždy existuje a navyše, $1 \leq m \leq n$. Ako sa dá interpretovať číslo m ?

5. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné podpriestory V_λ , zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A , sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T , t.j. $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

6. Majme maticu A . Ukážte, že zovšeobecnené vlastné vektorové priestory V_{λ_1} a V_{λ_2} prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám λ_1 a λ_2 majú triviálny prienik.

Návod. Sporom predpokladajte, že by existoval nenulový vektor $x \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$. Uvažujte rády k (k vlastnej hodnote λ_1) a l (k vlastnej hodnote λ_2), pričom bez ujmy na všeobecnosti $k \geq l$. Pozrite sa na výraz $(A - \lambda_2 I - (\lambda_1 - \lambda_2)I)^k x$.

Jordanove tvary

7. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K :

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pre ľubovoľnú maticu M provnajte JM a MK . Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať. Aké sú minimálne polynómy matíc J a K ?

8. Pre matice

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad B = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{array} \right]$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu B nájdite aj jej Jordanov tvar.

9. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A . Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

- Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$.
- Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1}JM_0 = J^T$.
- Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A .