

Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 2. apríl 2025

1. (5 bodov) Majme maticu A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Nájdite jej charakteristický polynóm a vlastné hodnoty.
- Nájdite jej vlastné vektory a diagonalizáciu $A = SAS^{-1}$. Maticu S^{-1} nemusíte počítať, ale ak ju viete nájsť bez dlhého počítania, napíšte ju.
- Čo všetko sa dá povedať o vlastných hodnotách matice A bez toho aby sme počítali jej charakteristický polynóm? Vysvetlite ako to súvisí s jej vlastnosťami a výsledkami častí a) a b).

2. (5 bodov) Uvažujme reálnu postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorá spĺňa rekurentný vzťah

$$x_{k+2} = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

pričom $x_0 = 1$ a $x_1 = 2$.

- Vyjadrite rekurentný vzťah v tvare $u_{k+1} = Au_k$ pre vhodnú maticu A , vhodný vektor u_k a vhodnú počiatočnú podmienku u_0 .
- Nájdite A^k a pomocou nej predpis pre x_k . Zjednodušte vyjadrenie pre x_k tak, aby obsahoval len reálne funkcie v premennej k .
- Existuje limita $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$? Čomu sa rovná člen x_{2025} ?

3. (5 bodov) Nech A a B sú reálne matice typu $n \times n$. Uvažujme blokovú maticu M typu $2n \times 2n$ v tvare

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right).$$

- Ukážte, že ak $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n+n}$ je vlastný vektor matice M prislúchajúci vlastnej hodnote λ , potom $x - iy \in \mathcal{N}(A + iB - \lambda I)$ a $x + iy \in \mathcal{N}(A - iB - \lambda I)$ a aspoň jeden z týchto vektorov je nenulový, t.j. je vlastným vektorom príslušnej matice.
- Ukážte, že ak $z \in \mathbb{C}^n$ je vlastný vektor matice $A + iB$ prislúchajúci vlastnej hodnote λ , potom $\bar{z}$ je vlastný vektor matice $A - iB$. Pre akú vlastnú hodnotu?
- Predpokladajme, že poznáme (všetky) vlastné hodnoty a vlastné vektory matice $A + iB$. Ako by sa z nich dali získať (všetky) vlastné hodnoty a vlastné vektory matice M ?

4. (5 bodov) (pravda/nepravda) So zdôvodnením, resp. príkladom alebo protipríkladom.

- Ak je nula vlastnou hodnotou pre každú zo štvorcových $n \times n$ matíc $A_1, A_2, \dots, A_k$, tak je aj vlastnou hodnotou ich súčtu $A_1 + A_2 + \dots + A_k$.
- Ak je nula vlastnou hodnotou niektorej zo štvorcových $n \times n$ matíc $A_1, A_2, \dots, A_k$, tak je vlastnou hodnotou ich súčinu $A_1 A_2 \dots A_k$.
- Ak $\chi_A(\lambda)$ je charakteristický polynóm pre maticu A , potom $\chi_{A^2}(\lambda) = \left(\chi_A(\sqrt{\lambda}) \right)^2$.
- Existuje 4×4 reálna antisymetrická matica A , ktorá spĺňa $A^6 = -I$.